

Proof of the Central Limit Theorem

សម្រាយបញ្ជាក់នៃមធ្យមនៃសំណាកគោរព Normal Distribution

ដោយ ជឹម សុជាតិ មន្ត្រីវិទ្យាស្ថានសិក្សាចិន

រាជបណ្ឌិត្យសភាកម្ពុជា

ជាការចាំបាច់ ដោយអត្ថបទមុន មធ្យមនៃសំណាកពី non-normal distribution គោរពតាម normal distribution មិនមែនជា សម្រាយបញ្ជាក់ proof របស់ខ្ញុំទេ ប៉ុន្តែការសិក្សាទៅលើ **Proof of the Central Limit Theorem** ដែលអ្នកប្រាជ្ញគណិតវិទ្យានៅអឺរ៉ុបបានសិក្សាតាំងតែ ឆ្នាំ ១៧០០s មានអ្នកប្រាជ្ញគណិតវិទ្យា Laplace ជាដើម និងសព្វថ្ងៃ Proof of the Central Limit Theorem នៅតែជាប្រធានបទសម្រាប់ការសិក្សាស្រាវជ្រាវដើម្បីបានបណ្ឌិតគណិតវិទ្យាស្ថិតិ។ ដូចនេះដើម្បីបានសម្រាយបញ្ជាក់ក្នុងគណិតវិទ្យានិងវិទ្យាសាស្ត្រត្រូវការស្រាវជ្រាវយូរ ដូចជា Poincare Conjecture ត្រូវការរយៈពេល ១ សតវត្ស ១០០ ឆ្នាំ ដែលត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ដោយ អ្នកគណិតវិទ្យា Perelman ក្នុងឆ្នាំ ២០០៨។ វិទ្យាស្ថានគណិតវិទ្យាពិភពលោក Clay Mathematics Institute បាននឹងប្រគល់មេដាយគណិតវិទ្យា និងទឹកប្រាក់១លានដុល្លារ ដល់អ្នកគណិតវិទ្យា Perelman ប៉ុន្តែអ្នកគណិតវិទ្យា Perelman មិនទទួលមេដាយ និងទឹកប្រាក់ ១ លានដុល្លារនេះ ដោយហេតុផលការរកឃើញសម្រាយបញ្ជាក់របស់គាត់គឺគឺជាការស្រាវជ្រាវរបស់អ្នកគណិតវិទ្យាមុនៗ និងជាពិសេសអ្នកគណិតវិទ្យា Hamilton។

វិធីសាស្ត្រដែលអ្នកប្រាជ្ញគណិតវិទ្យា បានប្រើក្នុងការសម្រាយបញ្ជាក់ Proof of the Central Limit Theorem គឺប្រើវិធីសាស្ត្រម៉ូម៉ង់ Moment Method និងពង្វាត Taylor Expansion ។ វិធីសាស្ត្រម៉ូម៉ង់ Moment Method ត្រូវបានរកឃើញដោយអ្នកប្រាជ្ញស្ថិតិ Karl Pearson ដែលសម្រាប់កំណត់រាង Distribution របស់ ទិន្នន័យស្ថិតិ (Variates)។ នៅក្នុងការសិក្សាពីរាង Distribution អ្នកប្រាជ្ញស្ថិតិ Karl Pearson បានប្រើវិធីសាស្ត្រ Moment មាន α និង β ដែលជាភាពប៉ោង Skewness និងភាពផុត Kurtosis។

វិធីសាស្ត្រម៉ូម៉ង់ Moment Method

$$\text{Moment} = E(X^n) = \frac{1}{N} \left(\sum X^n \right)$$

ដោយ n ជាស្វ័យគុណ និង N ជាចំនួន Variates ក្នុងទិន្នន័យ។

$n=1$ Moment ជាមធ្យម mean $\text{Moment} = E(X) = \frac{1}{N} \sum X$

$n=2$ Moment ជាវ៉ារ្យង់ Variance $\text{Moment} = E(X^2) = \frac{1}{N} (\sum X^2)$

$n=3$ និង $n=4$ ជាភាពប៉ោង Skewness និងភាពផុត Kurtosis

វិធីសាស្ត្រពង្វាត Taylor Expansion

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x - a) + \frac{f''(a)}{2!} (x - a)^2 + \dots$$

ទ្រឹស្តីបទ Theorem (Proof, Laplace 1820)៖ $X_1, X_2, \dots, X_N$ ជាទិន្នន័យស្ថិតិតិសំណាក N ពី

$N(\mu, \sigma^2)$ μ ជាមធ្យម σ^2 ជាវ៉ារ្យង់។ កំណត់ $W_n = (\bar{X} - \mu) / (\frac{\sigma}{\sqrt{N}})$ $\bar{X}$ ជាមធ្យម បន្ទាប់មក (Then)

$$W_N \sim N(0,1) \quad \text{as } N \rightarrow \infty$$
$$P(W_N \leq w) \approx \int_{-\infty}^w \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

សម្រាយបញ្ជាក់ (Proof)

$$E[\exp(tW_N)] = E\left\{\exp\left[\left(\frac{t}{\sqrt{N}\sigma}\right)\left(\sum_{i=1}^N X_i - N\mu\right)\right]\right\}$$
$$= E\left\{\exp\left[\left(\frac{t}{\sqrt{N}\sigma}\right)\left(\frac{X_1 - \mu}{\sigma}\right) + \dots + \left(\frac{t}{\sqrt{N}\sigma}\right)\left(\frac{X_N - \mu}{\sigma}\right)\right]\right\}$$

$E[\exp(tW_N)]$ ជា Moment Generation Function

$$E[\exp(tW_N)] = [M\left(\frac{t}{\sqrt{N}}\right)]^N$$

ដេរីវេ

$$M(t) = E\{\exp\left[t\left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)\right]\}$$

កំណត់

$$Y_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma}, \quad i=1, 2, \dots, N$$

ដូច្នេះ $E(Y_i) = 0$ និង $E(Y_i^2) = 1$ នាំឱ្យ

$$M(0) = 1, \quad M'(0) = E\left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right) = 0, \quad M''(0) = E\left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 = 1$$

ពង្រីក Taylor Expansion

$$M(t) = M(0) + M'(0)t + \frac{M''(t_1)t^2}{2} = 1 + \frac{M''(t_1)t^2}{2} + \frac{[M''(t_1) - 1]t^2}{2N}$$

t_1 នៅចន្លោះ 0 និង $t/\sqrt{N}$ និង $N \rightarrow \infty$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E[\exp(tW_N)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{1 + \frac{t^2}{2N} + \frac{[M''(t_1) - 1]t^2}{2N}\right\}^N = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{1 + \frac{t^2}{2N}\right\}^N = e^{t^2/2}$$

$$\left(\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{t}{N}\right)^N = e^t\right)$$

ដូច្នេះ

$$W_N \sim N(0, 1) \quad \text{as} \quad N \rightarrow \infty$$

$$P(W_N \leq w) \approx \int_{-\infty}^w \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

ឯកសារយោង៖

១. Karl Pearson (1895), *Contributions to the Mathematical Theory of Evolution. II. Skew Variation in Homogeneous*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London. A, Vol. 186 (1895), pp. 343-414
២. R. A. Fisher(1922), *On the Mathematical Foundations of Theoretical Statistics*, Phil. Trans. R. Soc. Lond. A 1922 222, 309-368
៣. Pierre-Simon Laplace (1820), *THE ANALYTIC THEORY OF PROBABILITIES*
3rd Edition Book I