ការរកតួទី n នៃស្វ៊ីតក្នុងរាងមួយៈ

$$u_{n+1} = au_n + g(n),\ a \neq 0$$

(Finding the *n*th Term of a Sequence in a Form:

$$u_{n+1} = au_n + g(n),\ a \neq 0)$$

ដោយៈ លោក **យឹម អាយុវឌ្ឍនៈវិជ្ជា**
ប្រធាននាយកដ្ឋានគណិតវិទ្យានិងស្ថិតិ
នៃវិទ្យាស្ថានវិទ្យាសាស្ត្រនិងបច្ចេកវិទ្យា
រាជបណ្ឌិត្យសភាកម្ពុជា

១. សេចក្តីផ្តើម

យើងខ្ញុំបានលើកយកអត្ថបទស្រាវជ្រាវបួនដែលទាក់ទងនឹងស្វ៊ីតគឺអត្ថបទទី១ស្តីពី **ស្វ៊ីត និងការពង្រីក** អត្ថបទទី២ស្តីពី **ការរកតួទី n នៃស្វ៊ីត និងផលបូក** (Finding the nth Term of a Sequence and Sum) [1] អត្ថបទទី៣ស្តីពី **ការរកតួទី n នៃស្វ៊ីតក្នុងរាងពីរ** (Finding the *n*th Term of a Sequence in Two Forms) និង អត្ថបទទី៤ស្តីពី **ការរកតួទី n នៃស្វ៊ីតក្នុងរាងទូទៅៈ** $u_{n+1} = a_r u_n^r + a_{r-1} u_n^{r-1} + a_{r-2} u_n^{r-2} + ... + a_1 u_n + a_0$ **(Finding the *n*th Term of a Sequence in a General Form)** [2] ដោយចុះផ្សាយក្នុង RAC Facebook Page (https://www.facebook.com/rac.gov.kh) នៅថ្ងៃទី២៦ ខែមីនា ឆ្នាំ២០២១ ថ្ងៃទី២៥ ខែមិថុនា ឆ្នាំ២០២៤ ថ្ងៃទី២៥ ខែសីហា ឆ្នាំ២០២៥ និងថ្ងៃទី៧ ខែកញ្ញា ឆ្នាំ២០២៥ រៀងគ្នា។ ឥឡូវនេះ យើងខ្ញុំលើកយកអត្ថបទស្រាវជ្រាវមួយទៀតស្តីពី **ការរកតួទី n នៃស្វ៊ីតក្នុងរាងមួយៈ** $u_{n+1} = au_n + g(n),\ a \neq 0$ **(Finding the *n*th Term of a Sequence in a Form)** មកចែករំលែកដល់អ្នកសិក្សា និងអ្នកស្រាវជ្រាវ ។ ជាការពិត ស្វ៊ីតមានរាង និងលក្ខណៈជាច្រើន ហេតុនេះក្នុងការរក ឬគណនាតួទី n នៃស្វ៊ីតអាចងាយស្រួល ឬលំបាក តែការសិក្សានេះយើងនឹងលើកយកស្វ៊ីតពិសេសក្នុងរាងមួយគឺ $u_{n+1} = au_n + g(n),\ a \neq 0$ ដែលមានករណីជាច្រើន ហើយពីរបៀបរកតួទី n នៃស្វ៊ីត។ ចំពោះគោលបំណងនៃអត្ថបទស្រាវជ្រាវនេះ គឺចង់បង្ហាញពីទ្រឹស្តីបទចំនួនដប់ ដែលនឹងបង្ហាញរូបមន្តតួទី n នៃស្វ៊ីតក្នុងរាងខាងលើ ដើម្បីជួយសម្រួលក្នុងការរក ឬគណនាតួនៃស្វ៊ីតឱ្យបានលឿនជាងមុន ដល់សិស្ស និស្សិត លោកគ្រូ អ្នកគ្រូ និងអ្នកស្រាវជ្រាវក្នុងការសិក្សាជំនាញគណិតវិទ្យា ហើយជាឯកសារជំនួយសម្រាប់រៀន និងបង្រៀនផងដែរ។ តើរូបមន្តតួទី n នៃស្វ៊ីតក្នុងរាងមួយនេះកំណត់យ៉ាងដូចម្តេចខ្លះ? ដើម្បីឆ្លើយតបនឹងសំណួរនេះ យើងខ្ញុំនឹងរៀបរៀងនូវទ្រឹស្តីបទទាំងដប់ ដោយមានភ្ជាប់នឹងរូបមន្តតួទី n នៃស្វ៊ីតក្នុងករណីនីមួយៗរៀងគ្នា និងការអនុវត្តរបស់វា។

---

[1] (4) ការរកតួទី n... - រាជបណ្ឌិត្យសភាកម្ពុជា - Royal Academy of Cambodia | Facebook

[2] (3) ការរកតួទី n... - រាជបណ្ឌិត្យសភាកម្ពុជា - Royal Academy of Cambodia | Facebook

២. ស្វ៊ីតមានរាង $u_{n+1} = au_n + g(n),\ a \neq 0$

ទ្រឹស្តីបទទី១

គេមានស្វ៊ីតចំនួនពិត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} : u_1, u_2, ..., u_n, ...$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនងកំណើន $u_{n+1} = au_n + g(n),\ a \neq 0$ ។ តាង $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតដែលមានរាងតាមអនុគមន៍ $g(n)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនងកំណើន $r_{n+1} = ar_n + g(n)$ ។ នោះគេបានតួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n) គឺ

$$u_n = u_1 + \sum_{k=1}^{n-1} g(k) \quad (1)$$ ចំពោះ $a = 1,\ n \geq 2$

និង $u_n = (u_1 - r_1)a^{n-1} + r_n \quad (2)$

ចំពោះ $a \neq 1,\ \forall n \in \mathbb{N}$ ។

យើងមានសម្រាយបញ្ជាក់ដូចតទៅៈ

ស្រាយថា ចំពោះ $a = 1,\ n \geq 2$ និង

$u_n = (u_1 - r_1)a^{n-1} + r_n$ ចំពោះ $a \neq 1,\ \forall n \in \mathbb{N}$ ។

$-$ករណី $a = 1$ យើងបាន $u_{n+1} = u_n + g(n)$ សមមូល $u_{n+1} - u_n = g(n)$ ។ នាំឱ្យស្វ៊ីត $(g(n))_{n\in\mathbb{N}}$ ជាផលសងលំដាប់១នៃស្វ៊ីត (u_n) ។ នោះតាមទ្រឹស្តីបទទី៦ (អត្ថបទទី២) នាំឱ្យតួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n) គឺ

$$u_n = u_1 + \sum_{k=1}^{n-1} g(k)$$ ចំពោះ $n \geq 2$ ។

$-$ករណី $a \neq 1$ យើងតាង $v_n = u_n - r_n$ ជាស្វ៊ីតជំនួយ។ នាំឱ្យ

$v_{n+1} = u_{n+1} - r_{n+1} = (au_n + g(n)) - (ar_n + g(n))$

សមមូល $v_{n+1} = a(u_n - r_n) = av_n$ ។

នាំឱ្យ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ដែលមាន

$v_1 = u_1 - r_1$ និង $q = \dfrac{v_2}{v_1} = \dfrac{av_1}{v_1} = a$ ។

នាំឱ្យតួទី n នៃស្វ៊ីត (v_n) គឺ

$v_n = v_1 q^{n-1} = (u_1 - r_1)a^{n-1}$ ។

នាំឱ្យតួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n) គឺ

$u_n = v_n + r_n = (u_1 - r_1)a^{n-1} + r_n$ ចំពោះ $n \geq 2$ ។

ចំពោះ $n = 1$ នាំឱ្យ $u_1 = (u_1 - r_1)a^{1-1} + r_1 = u_1$ (ពិត)។

ដូចនេះ $u_n = u_1 + \sum_{k=1}^{n-1} g(k)$ ពិតចំពោះ $a = 1,\ n \geq 2$ និង

$u_n = (u_1 - r_1)a^{n-1} + r_n$ ពិតចំពោះ $a \neq 1,\ \forall n \in \mathbb{N}$ ។

សម្គាល់

ខ្ញុំបានរៀបរៀងនូវទ្រឹស្តីបទទី១ នៅថ្ងៃទី៧ ខែកុម្ភៈ ឆ្នាំ២០២៤។

ឥឡូវនេះ យើងសិក្សាស្វ៊ីតមានរាង $u_{n+1} = au_n + g(n)$ ដដែល ក្នុងករណី $a = 1$ និង $g(n) = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + a_3 n^3 + a_4 n^4 + a_5 n^5$ ដែលបង្ហាញក្នុងទ្រឹស្តីបទទី២។

ទ្រឹស្តីបទទី២

គេមានស្វ៊ីតចំនួនពិត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} : u_1, u_2, ..., u_n, ...$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនងកំណើន

$u_{n+1} = u_n + a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + a_3 n^3 + a_4 n^4 + a_5 n^5$ ។

នោះគេបានតួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n) គឺ

$$u_n = u_1 + (n-1)a_0 + \frac{n(n-1)a_1}{2} + \frac{n(n-1)(2n-1)a_2}{6}$$
$$+ \frac{n^2(n-1)^2 a_3}{4} + \frac{n(n-1)(2n-1)(3n^2-3n-1)a_4}{30}$$

$$+\frac{n^2(n-1)^2(2n^2-2n-1)a_5}{12} \quad (3)$$

ចំពោះ $\forall n\in\mathbb{N}$ ។

យើងមានសម្រាយបញ្ជាក់ដូចតទៅៈ

ស្រាយថា រូបមន្ត (3) ពិតចំពោះ $\forall n\in\mathbb{N}$ ។

យើងមាន

$g(n)=a_0+a_1n+a_2n^2+a_3n^3+a_4n^4+a_5n^5$ ។

ចំពោះ $n\ge 2$ នោះតាមទ្រឹស្តីបទទី១ និង រូបមន្តនៃផលបូក (អត្ថបទទី២) នាំឱ្យ

$$u_n=u_1+\sum_{k=1}^{n-1}g(k)$$

$$=u_1+\sum_{k=1}^{n-1}(a_0+a_1n+a_2n^2+a_3n^3+a_4n^4+a_5n^5)$$

$$=u_1+\sum_{k=1}^{n-1}a_0+\sum_{k=1}^{n-1}a_1n+\sum_{k=1}^{n-1}a_2n^2+\sum_{k=1}^{n-1}a_3n^3+\sum_{k=1}^{n-1}a_4n^4+\sum_{k=1}^{n-1}a_5n^5$$

$$=u_1+\sum_{k=1}^{n-1}a_0+a_1\sum_{k=1}^{n-1}n+a_2\sum_{k=1}^{n-1}n^2+a_3\sum_{k=1}^{n-1}n^3+a_4\sum_{k=1}^{n-1}n^4+a_5\sum_{k=1}^{n-1}n^5$$

$$=u_1+(n-1)a_0+\frac{n(n-1)a_1}{2}+\frac{n(n-1)(2n-1)a_2}{6}$$

$$+\frac{n^2(n-1)^2a_3}{4}+\frac{n(n-1)(2n-1)(3n^2-3n-1)a_4}{30}$$

$$+\frac{n^2(n-1)^2(2n^2-2n-1)a_5}{12}$$

ហើយចំពោះ $n=1$ នាំឱ្យ

$$u_1=u_1+(1-1)a_0+\frac{1\cdot(1-1)a_1}{2}+\frac{1\cdot(1-1)(2\cdot1-1)a_2}{6}$$

$$+\frac{1^2(1-1)^2a_3}{4}+\frac{1\cdot(1-1)(2\cdot1-1)(3\cdot1^2-3\cdot1-1)a_4}{30}$$

$$+\frac{1^2(1-1)^2(2\cdot1^2-2\cdot1-1)a_5}{12}=u_1 \text{ (ពិត)។}$$

ដូចនេះ រូបមន្ត (3) ពិតចំពោះ $\forall n\in\mathbb{N}$ ។

សម្គាល់

ខ្ញុំបានរៀបរៀងនូវទ្រឹស្តីបទទី២ នៅថ្ងៃទី៧ ខែកុម្ភៈ ឆ្នាំ២០២៤។

ឥឡូវនេះ យើងអនុវត្តលើឧទាហរណ៍មួយដោយប្រើទ្រឹស្តីបទទី២ (រូបមន្ត (3))។

ឧទាហរណ៍ទី១

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង $u_{n+1}=u_n+3n^2$ និង $u_1=2$ ។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅៈ

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n) ។

យើងមានទំនាក់ទំនង $u_{n+1}=u_n+3n^2$ និង $u_1=2$ ។ នាំឱ្យ $a=1$ និង $g(n)=3n^2$ ។

នាំឱ្យ $a_0=a_1=a_3=a_4=a_5=0$ និង $a_2=3$ ។

តាមរូបមន្ត (3) យើងបានតួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n) គឺ

$$u_n=u_1+(n-1)a_0+\frac{n(n-1)a_1}{2}+\frac{n(n-1)(2n-1)a_2}{6}$$

$$+\frac{n^2(n-1)^2a_3}{4}+\frac{n(n-1)(2n-1)(3n^2-3n-1)a_4}{30}$$

$$+\frac{n^2(n-1)^2(2n^2-2n-1)a_5}{12}$$

$$=2+(n-1)\cdot0+\frac{n(n-1)\cdot0}{2}+\frac{n(n-1)(2n-1)\cdot3}{6}$$

$$+\frac{n^2(n-1)^2\cdot0}{4}+\frac{n(n-1)(2n-1)(3n^2-3n-1)\cdot0}{30}$$

$$+\frac{n^2(n-1)^2(2n^2-2n-1)\cdot0}{12}=2+\frac{n(n-1)(2n-1)}{2}$$

$=n^3-\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n+2$ ចំពោះ $\forall n\in\mathbb{N}$ ។

យើងសិក្សាស្វ៊ីតមានរាង $u_{n+1}=au_n+g(n)$ ដដែល ក្នុងករណី $a\ne0,1$ និង $g(n)=c$ ដែលបង្ហាញក្នុងទ្រឹស្តីបទទី៣។

ទ្រឹស្តីបទទី៣

គេមានស្វ៊ីតចំនួនពិត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}: u_1, u_2, ..., u_n, ...$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនងកំណើន

$u_{n+1} = au_n + c,\ a \neq 0,1$ ។

នោះគេបានតួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n) គឺ

$$u_n = (u_1 + \frac{c}{a-1})a^{n-1} - \frac{c}{a-1} \quad (4)$$

ចំពោះ $\forall n\in\mathbb{N}$ ។

យើងមានសម្រាយបញ្ជាក់ដូចតទៅៈ

ស្រាយថា $u_n = (u_1 + \frac{c}{a-1})a^{n-1} - \frac{c}{a-1}$ ចំពោះ $\forall n\in\mathbb{N}$ ។

យើងមាន $g(n) = c$ និង $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតដែលមានរាងតាមអនុគមន៍ $g(n)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនងកំណើន $r_{n+1} = ar_n + g(n)$ ។ នោះយើងតាង $r_n = \alpha$ ។ នាំឱ្យ $r_{n+1} = \alpha$ និងទំនាក់ទំនងកំណើនសមមូល $\alpha = a\alpha + c$ សមមូល $(1-a)\alpha = c$ សមមូល $\alpha = \frac{c}{1-a}$ ពីព្រោះ $a \neq 1$ ។

នាំឱ្យ $r_n = \frac{c}{1-a}$ ចំពោះ $\forall n\in\mathbb{N}$ ។

តាមទ្រឹស្តីបទទី១ នោះតួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n) គឺ

$$u_n = (u_1 - r_1)a^{n-1} + r_n = (u_1 - \frac{c}{1-a})a^{n-1} + \frac{c}{1-a}$$

$$= (u_1 + \frac{c}{a-1})a^{n-1} - \frac{c}{a-1}$$ ពិតចំពោះ $\forall n\in\mathbb{N}$ ។

សម្គាល់

ខ្ញុំបានរៀបរៀងនូវទ្រឹស្តីបទទី៣ នៅថ្ងៃទី៧ ខែកុម្ភៈ ឆ្នាំ២០២៤។

ឥឡូវនេះ យើងអនុវត្តលើឧទាហរណ៍មួយដោយប្រើទ្រឹស្តីបទទី៣ (រូបមន្ត (4)) ។

ឧទាហរណ៍ទី២

គេឱ្យស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ មួយកំណត់ដោយ $u_1 = 2$ និង $4u_{n+1} = 3u_n + 5$ ។

ចូរកំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីតនេះ។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅៈ

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n) ។

យើងមានទំនាក់ទំនង $4u_{n+1} = 3u_n + 5$ និង $u_1 = 2$ ។ នាំឱ្យ $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{5}{4}$ ដែល $a = \frac{3}{4}$ និង $g(n) = c = \frac{5}{4}$ ។

តាមរូបមន្ត (4) យើងបានតួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n) គឺ

$$u_n = (u_1 + \frac{c}{a-1})a^{n-1} - \frac{c}{a-1}$$

$$= (2 + \frac{\frac{5}{4}}{\frac{3}{4}-1})\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} - \frac{\frac{5}{4}}{\frac{3}{4}-1}$$

$$= -3\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} + 5$$ ចំពោះ $\forall n\in\mathbb{N}$ ។

យើងសិក្សាស្វ៊ីតមានរាង $u_{n+1} = au_n + g(n)$ ដដែល ក្នុងករណី $a \neq 0,1$ និង $g(n) = a_1 n + b_1$ ដែលបង្ហាញក្នុងទ្រឹស្តីបទទី៤។

ទ្រឹស្តីបទទី៤

គេមានស្វ៊ីតចំនួនពិត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}: u_1, u_2, ..., u_n, ...$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនងកំណើន

$u_{n+1} = au_n + a_1 n + b_1,\ a \neq 0,1$ ។

នោះគេបានតួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n) គឺ

$$u_n = (u_1 - \alpha - \beta)a^{n-1} + \alpha n + \beta \quad (5)$$

ចំពោះ $\forall n\in\mathbb{N},\ \alpha=\frac{a_1}{1-a},\ \beta=\frac{b_1-\alpha}{1-a}$ ។

យើងមានសម្រាយបញ្ជាក់ដូចតទៅ៖

ស្រាយថា $u_n=(u_1-\alpha-\beta)a^{n-1}+\alpha n+\beta$

ចំពោះ $\forall n\in\mathbb{N},\ \alpha=\frac{a_1}{1-a},\ \beta=\frac{b_1-\alpha}{1-a}$ ។

ដោយ $g(n)=a_1n+b_1$ និង $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីត ដែលមានរាងតាមអនុគមន៍ $g(n)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនងកំណើន $r_{n+1}=ar_n+g(n)$ ។ នោះយើងតាង $r_n=\alpha n+\beta$ ។

នាំឱ្យ $r_{n+1}=\alpha(n+1)+\beta=\alpha n+\alpha+\beta$ និង ទំនាក់ទំនងកំណើនសមមូល

$\alpha n+\alpha+\beta=a(\alpha n+\beta)+a_1n+b_1$

សមមូល $\alpha n+\alpha+\beta=(a\alpha+a_1)n+a\beta+b_1$

សមមូល $\alpha=a\alpha+a_1$ និង $\alpha+\beta=a\beta+b_1$ ។

សមមូល $(1-a)\alpha=a_1$ និង $(1-a)\beta=b_1-\alpha$

សមមូល $\alpha=\frac{a_1}{1-a}$ និង $\beta=\frac{b_1-\alpha}{1-a}$ ពីព្រោះ $a\neq 1$ ។ នាំឱ្យ $r_n=\alpha n+\beta$ ចំពោះ $\forall n\in\mathbb{N}$ និង $r_1=\alpha\cdot 1+\beta=\alpha+\beta$

ដែល $\alpha=\frac{a_1}{1-a}$ និង $\beta=\frac{b_1-\alpha}{1-a}$ ។

តាមទ្រឹស្តីបទទី១ នោះតួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n) គឺ

$u_n=(u_1-r_1)a^{n-1}+r_n$

$\quad=(u_1-\alpha-\beta)a^{n-1}+\alpha n+\beta$ ពិត

ចំពោះ $\forall n\in\mathbb{N},\ \alpha=\frac{a_1}{1-a},\ \beta=\frac{b_1-\alpha}{1-a}$ ។

សម្គាល់

ខ្ញុំបានរៀបរៀងនូវទ្រឹស្តីបទទី៤ នៅថ្ងៃទី៥ ខែមីនា ឆ្នាំ២០២៤។

ឥឡូវនេះ យើងអនុវត្តលើឧទាហរណ៍ពីរដោយប្រើទ្រឹស្តីបទទី៤ (រូបមន្ត (5)) ។

ឧទាហរណ៍ទី៣

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែលកំណត់ដោយ $u_1=3$ និង $u_{n+1}=2u_n-n+1$ ។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n) ។

យើងមានទំនាក់ទំនង $u_{n+1}=2u_n-n+1$ និង $u_1=3$ ។ នាំឱ្យ $a=2$ និង $g(n)=-n+1$ ដែល $a_1=-1$ និង $b_1=1$ ។ នាំឱ្យ

$\alpha=\frac{a_1}{1-a}=\frac{-1}{1-2}=1,\ \beta=\frac{b_1-\alpha}{1-a}=\frac{1-1}{1-2}=0$ ។

តាមរូបមន្ត (5) យើងបានតួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n) គឺ

$u_n=(u_1-\alpha-\beta)a^{n-1}+\alpha n+\beta$

$\quad=(3-1-0)\cdot 2^{n-1}+1\cdot n+0=2^n+n$

ចំពោះ $\forall n\in\mathbb{N}$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៤

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែលកំណត់ដោយ $u_1=5$ និង $u_{n+1}=3u_n-2n+2$ ។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n) ។

យើងមានទំនាក់ទំនង $u_{n+1}=3u_n-2n+2$ និង $u_1=5$ ។ នាំឱ្យ $a=3$ និង $g(n)=-2n+2$ ដែល $a_1=-2$ និង $b_1=2$ ។ នាំឱ្យ

$\alpha=\frac{a_1}{1-a}=\frac{-2}{1-3}=1,\ \beta=\frac{b_1-\alpha}{1-a}=\frac{2-1}{1-3}=-\frac{1}{2}$ ។

តាមរូបមន្ត (5) យើងបានតួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n) គឺ

$u_n=(u_1-\alpha-\beta)a^{n-1}+\alpha n+\beta$

$=(5-1+\frac{1}{2})3^{n-1}+1\cdot n-\frac{1}{2}=\frac{9}{2}\cdot 3^{n-1}+n-\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2}\cdot 3^{n+1}+n-\frac{1}{2}$ ចំពោះ $\forall n\in\mathbb{N}$ ។

យើងសិក្សាស្វ៊ីតមានរាង $u_{n+1}=au_n+g(n)$ ជដែល ក្នុងករណី $a\neq 0,1$ និង $g(n)=a_1n^2+b_1n+c_1$ ដែលបង្ហាញក្នុងទ្រឹស្តីបទទី៥។

ទ្រឹស្តីបទទី៥

គេមានស្វ៊ីតចំនួនពិត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}: u_1, u_2, ..., u_n, ...$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនងកំណើន

$u_{n+1}=au_n+a_1n^2+b_1n+c_1,\ a\neq 0,1$ ។

នោះគេបានតួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n) គឺ

$$u_n=(u_1-\alpha-\beta-\gamma)a^{n-1}+\alpha n^2+\beta n+\gamma \quad (6)$$

ចំពោះ $\forall n\in\mathbb{N},\ \alpha=\frac{a_1}{1-a},\ \beta=\frac{b_1-2\alpha}{1-a},$

$\gamma=\frac{c_1-\alpha-\beta}{1-a}$ ។

យើងមានសម្រាយបញ្ជាក់ដូចតទៅៈ

ស្រាយថា $u_n=(u_1-\alpha-\beta-\gamma)a^{n-1}+\alpha n^2+\beta n+\gamma$

ចំពោះ $\forall n\in\mathbb{N},\ \alpha=\frac{a_1}{1-a},\ \beta=\frac{b_1-2\alpha}{1-a},$

$\gamma=\frac{c_1-\alpha-\beta}{1-a}$ ។

ដោយ $g(n)=a_1n^2+b_1n+c_1$ និង $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតដែលមានរាងតាមអនុគមន៍ $g(n)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនងកំណើន $r_{n+1}=ar_n+g(n)$ ។ នោះយើងតាង $r_n=\alpha n^2+\beta n+\gamma$ ។ នាំឱ្យ

$r_{n+1}=\alpha(n+1)^2+\beta(n+1)+\gamma$

$=\alpha n^2+(2\alpha+\beta)n+\alpha+\beta+\gamma$

និងទំនាក់ទំនងកំណើនសមមូល

$\alpha n^2+(2\alpha+\beta)n+\alpha+\beta+\gamma$

$=a(\alpha n^2+\beta n+\gamma)+a_1n^2+b_1n+c_1$

សមមូល $\alpha n^2+(2\alpha+\beta)n+\alpha+\beta+\gamma$

$=(a\alpha+a_1)n^2+(a\beta+b_1)n+a\gamma+c_1$

សមមូល $\alpha=a\alpha+a_1,\ 2\alpha+\beta=a\beta+b_1$ និង

$\alpha+\beta+\gamma=a\gamma+c_1$

សមមូល $(1-a)\alpha=a_1,\ (1-a)\beta=b_1-2\alpha$ និង

$(1-a)\gamma=c_1-\alpha-\beta$

សមមូល $\alpha=\frac{a_1}{1-a},\ \beta=\frac{b_1-2\alpha}{1-a}$ និង

$\gamma=\frac{c_1-\alpha-\beta}{1-a}$ ពីព្រោះ $a\neq 1$ ។

នាំឱ្យ $r_n=\alpha n^2+\beta n+\gamma$ ចំពោះ $\forall n\in\mathbb{N}$ និង

$r_1=\alpha\cdot 1^2+\beta\cdot 1+\gamma=\alpha+\beta+\gamma$

ដែល $\alpha=\frac{a_1}{1-a},\ \beta=\frac{b_1-2\alpha}{1-a}$ និង

$\gamma=\frac{c_1-\alpha-\beta}{1-a}$ ។

តាមទ្រឹស្តីបទទី១ នោះតួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n) គឺ

$u_n=(u_1-r_1)a^{n-1}+r_n$

$=(u_1-\alpha-\beta-\gamma)a^{n-1}+\alpha n^2+\beta n+\gamma$ ពិត

ចំពោះ $\forall n\in\mathbb{N},\ \alpha=\frac{a_1}{1-a},\ \beta=\frac{b_1-2\alpha}{1-a}$ និង

$\gamma=\frac{c_1-\alpha-\beta}{1-a}$ ។

សម្គាល់

ខ្ញុំបានរៀបរៀងនូវទ្រឹស្តីបទទី៥ នៅថ្ងៃទី៥ ខែមីនា ឆ្នាំ២០២៤។

ឥឡូវនេះ យើងអនុវត្តលើឧទាហរណ៍មួយដោយប្រើទ្រឹស្តីបទទី៥ (រូបមន្ត (6)) ។

ឧទាហរណ៍ទី៥

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែលកំណត់ដោយ $u_1=5$ និង $u_{n+1}=2u_n+n^2+2n+1$ ។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n) ។

យើងមានទំនាក់ទំនង $u_{n+1}=2u_n+n^2+2n+1$ និង $u_1=5$ ។ នាំឱ្យ $a=2$ និង $g(n)=n^2+2n+1$ ដែល $a_1=1, b_1=2$ និង $c_1=1$ ។

នាំឱ្យ $\alpha=\dfrac{a_1}{1-a}=\dfrac{1}{1-2}=-1,$

$\beta=\dfrac{b_1-2\alpha}{1-a}=\dfrac{2-2(-1)}{1-2}=-4$ និង

$\gamma=\dfrac{c_1-\alpha-\beta}{1-a}=\dfrac{1-(-1)-(-4)}{1-2}=-6$ ។

តាមរូបមន្ត (6) យើងបានតួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n) គឺ

$u_n=(u_1-\alpha-\beta-\gamma)a^{n-1}+\alpha n^2+\beta n+\gamma$

$=(5+1+4+6)2^{n-1}-n^2-4n-6$

$=16\cdot 2^{n-1}-n^2-4n-6$ ចំពោះ $\forall n\in\mathbb{N}$ ។

យើងសិក្សាស្វ៊ីតមានរាង $u_{n+1}=au_n+g(n)$ ដដែល ក្នុងករណី $a\neq 0$ និង $g(n)=kb^n$ ដែលបង្ហាញក្នុងទ្រឹស្តីបទទី៦។

ទ្រឹស្តីបទទី៦

គេមានស្វ៊ីតចំនួនពិត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}: u_1, u_2, ..., u_n, ...$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនងកំណើន

$u_{n+1}=au_n+kb^n,\ a\neq 0$ ។

នោះគេបានតួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n) គឺ

$$u_n=(u_1-\frac{kb}{b-a})a^{n-1}+\frac{k}{b-a}b^n \quad (7)$$

ចំពោះ $\forall n\in\mathbb{N}, b\neq a$ និង

$$u_n=(u_1-k+kn)a^{n-1} \quad (8)$$

ចំពោះ $\forall n\in\mathbb{N}, b=a$ ។

យើងមានសម្រាយបញ្ជាក់ដូចតទៅ៖

ស្រាយថា $u_n=(u_1-\dfrac{kb}{b-a})a^{n-1}+\dfrac{k}{b-a}b^n$

ចំពោះ $\forall n\in\mathbb{N}, b\neq a$ និង

$u_n=(u_1-k+kn)a^{n-1}$ ចំពោះ $\forall n\in\mathbb{N}, b=a$ ។

$-$ករណី $b\neq a$ យើងមាន $g(n)=kb^n$ និង $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតដែលមានរាងតាមអនុគមន៍ $g(n)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនងកំណើន

$r_{n+1}=ar_n+g(n)$ ។ នោះយើងតាង $r_n=\alpha b^n$ ។

នាំឱ្យ $r_{n+1}=\alpha b^{n+1}=b\alpha b^n$ និងទំនាក់ទំនងកំណើនសមមូល

$b\alpha b^n=a(\alpha b^n)+kb^n=(a\alpha+k)b^n$

សមមូល $b\alpha=a\alpha+k$ សមមូល $(b-a)\alpha=k$

សមមូល $\alpha=\dfrac{k}{b-a}$ ពីព្រោះ $b\neq a$ ។

នាំឱ្យ $r_n=\alpha b^n=\dfrac{k}{b-a}b^n$

ចំពោះ $\forall n\in\mathbb{N}$ និង $r_1=\dfrac{kb}{b-a}$ ។

តាមទ្រឹស្តីបទទី១ នោះតួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n) គឺ

$u_n=(u_1-r_1)a^{n-1}+r_n$

$=(u_1-\dfrac{kb}{b-a})a^{n-1}+\dfrac{k}{b-a}b^n$ ពិត

ចំពោះ $\forall n\in\mathbb{N}$ ។

$-$ករណី $b=a$ នោះ $g(n)=ka^n$ ហើយ $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតដែលមានរាងតាមអនុគមន៍ $g(n)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនងកំណើន

$r_{n+1} = a r_n + g(n)$ ។ នោះយើងតាង $r_n = \alpha n a^n$ ។

នាំឱ្យ $r_{n+1} = \alpha(n+1) a^{n+1} = (\alpha an + \alpha a) a^n$ និង ទំនាក់ទំនងកំណើនសមមូល

$(\alpha an + \alpha a) a^n = a(\alpha n a^n) + k a^n = (\alpha an + k) a^n$

សមមូល $\alpha an + \alpha a = \alpha an + k$ សមមូល

$\alpha a = k$ សមមូល $\alpha = \frac{k}{a}$ ។

នាំឱ្យ $r_n = \alpha n a^n = \frac{k}{a} n a^n = kn a^{n-1}$

ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ និង $r_1 = k$ ។

តាមទ្រឹស្តីបទទី១ នោះតួទី n នៃស្ទីត (u_n) គឺ

$$u_n = (u_1 - r_1) a^{n-1} + r_n = (u_1 - k) a^{n-1} + kn a^{n-1}$$

$= (u_1 - k + kn) a^{n-1}$ ពិតចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ ។

សម្គាល់

ខ្ញុំបានរៀបរៀងនូវទ្រឹស្តីបទទី៦ នៅថ្ងៃទី២ ខែមេសា ឆ្នាំ២០២៤។

ឥឡូវនេះ យើងអនុវត្តលើឧទាហរណ៍ពីរដោយប្រើទ្រឹស្តីបទទី៦ (រូបមន្ត (7) និង (8)) ។

ឧទាហរណ៍ទី៦

កំណត់តួទី n នៃស្ទីត $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ដែលកំណត់ដោយ $u_1 = 1$ និង $u_{n+1} = \frac{2}{3} u_n + 2^n$ ។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖

កំណត់តួទី n នៃស្ទីត (u_n) ។

យើងមានទំនាក់ទំនង $u_{n+1} = \frac{2}{3} u_n + 2^n$ និង $u_1 = 1$ ។ នាំឱ្យ $a = \frac{2}{3}$ និង $g(n) = 2^n$ ដែល $k = 1$ និង $b = 2 \neq a$ ។

តាមរូបមន្ត (7) យើងបានតួទី n នៃស្ទីត (u_n) គឺ

$$u_n = (u_1 - \frac{kb}{b-a}) a^{n-1} + \frac{k}{b-a} b^n$$

$$= [1 - \frac{1(2)}{2-(2/3)}](2/3)^{n-1} + \frac{1}{2-(2/3)} 2^n$$

$= -\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \frac{3}{4} 2^n$ ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៧

កំណត់តួទី n នៃស្ទីត $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ដែលកំណត់ដោយ $u_1 = 2$ និង $u_{n+1} = 3u_n + 5 \cdot 3^n$ ។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖

កំណត់តួទី n នៃស្ទីត (u_n) ។

យើងមានទំនាក់ទំនង $u_{n+1} = 3u_n + 5 \cdot 3^n$ និង $u_1 = 2$ ។ នាំឱ្យ $a = 3$ និង $g(n) = 5 \cdot 3^n$ ដែល $k = 5$ និង $b = 3 = a$ ។

តាមរូបមន្ត (8) យើងបានតួទី n នៃស្ទីត (u_n) គឺ

$$u_n = (u_1 - k + kn) a^{n-1} = (2 - 5 + 5n) 3^{n-1}$$

$= (5n - 3) 3^{n-1}$ ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ ។

យើងសិក្សាស្ទីតមានរាង $u_{n+1} = a u_n + g(n)$ ដដែល ក្នុងករណី $a \neq 0$ និង $g(n) = (a_1 n + b_1) c^n$ ដែលបង្ហាញក្នុងទ្រឹស្តីបទទី៧។

ទ្រឹស្តីបទទី៧

គេមានស្ទីតចំនួនពិត $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} : u_1, u_2, ..., u_n, ...$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនងកំណើន

$u_{n+1} = a u_n + (a_1 n + b_1) c^n, a \neq 0$ ។

នោះគេបានតួទី n នៃស្ទីត (u_n) គឺ

$$u_n = [u_1 - (\alpha + \beta) c] a^{n-1} + (\alpha n + \beta) c^n \quad (9)$$

ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}, c \neq a, \alpha = \frac{a_1}{c-a}, \beta = \frac{b_1 - \alpha c}{c-a}$

និង $u_n = a^{n-1}[u_1 + \frac{a_1}{2}n(n-1) + b_1(n-1)]$ (10)

ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}, c = a$ ។

យើងមានសម្រាយបញ្ជាក់ដូចតទៅៈ

ស្រាយថា $u_n = [u_1 - (\alpha+\beta)c]a^{n-1} + (\alpha n + \beta)c^n$

ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}, c \neq a, \alpha = \frac{a_1}{c-a}, \beta = \frac{b_1 - \alpha c}{c-a}$

និង $u_n = a^{n-1}[u_1 + \frac{a_1}{2}n(n-1) + b_1(n-1)]$

ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}, c = a$ ។

$-$ករណី $c \neq a$ យើងមាន $g(n) = (a_1 n + b_1)c^n$

និង $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតដែលមានរាងតាមអនុគមន៍

$g(n)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនងកំណើន

$r_{n+1} = a r_n + g(n)$ ។ នោះយើងតាង $r_n = (\alpha n + \beta)c^n$ ។

នាំឱ្យ $r_1 = (\alpha+\beta)c,\ r_{n+1} = [\alpha(n+1)+\beta]c^{n+1}$

និងទំនាក់ទំនងកំណើនសមមូល

$[\alpha(n+1)+\beta]c^{n+1} = a(\alpha n + \beta)c^n + (a_1 n + b_1)c^n$

សមមូល $\alpha c(n+1) + \beta c = a(\alpha n + \beta) + a_1 n + b_1$

សមមូល $\alpha c n + (\alpha c + \beta c) = (a\alpha + a_1)n + (a\beta + b_1)$

សមមូល $\alpha c = a\alpha + a_1$ និង $\alpha c + \beta c = a\beta + b_1$

សមមូល $\alpha(c-a) = a_1$ និង $\beta(c-a) = b_1 - \alpha c$

សមមូល $\alpha = \frac{a_1}{c-a}$ និង $\beta = \frac{b_1 - \alpha c}{c-a}$ ពីព្រោះ

$c \neq a$ ។

តាមទ្រឹស្តីបទទី១ នោះតួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n) គឺ

$u_n = (u_1 - r_1)a^{n-1} + r_n$

$= [u_1 - (\alpha+\beta)c]a^{n-1} + (\alpha n + \beta)c^n$ ពិត

ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha = \frac{a_1}{c-a}, \beta = \frac{b_1 - \alpha c}{c-a}$ ។

$-$ករណី $c = a$ នោះ $g(n) = (a_1 n + b_1)a^n$

ហើយ $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតដែលមានរាងតាមអនុគមន៍

$g(n)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនងកំណើន

$r_{n+1} = a r_n + g(n)$ ។ នោះយើងតាង

$r_n = (\alpha n + \beta)n a^n$ ។

នាំឱ្យ $r_{n+1} = [\alpha(n+1)+\beta](n+1)a^{n+1}$ និង

ទំនាក់ទំនងកំណើនសមមូល

$[\alpha(n+1)+\beta](n+1)a^{n+1}$

$= a(\alpha n + \beta)n a^n + (a_1 n + b_1)a^n$

សមមូល $[\alpha(n+1)+\beta](n+1)a$

$= a(\alpha n + \beta)n + a_1 n + b_1$

សមមូល $\alpha a(n+1)^2 + \beta a(n+1)$

$= \alpha a n^2 + \beta a n + a_1 n + b_1$

សមមូល $\alpha a n^2 + (2\alpha a + \beta a)n + \alpha a + \beta a$

$= \alpha a n^2 + (\beta a + a_1)n + b_1$

សមមូល $2\alpha a + \beta a = \beta a + a_1$ និង

$\alpha a + \beta a = b_1$ សមមូល $2\alpha a = a_1$ និង

$\beta a = b_1 - a\alpha$ សមមូល $\alpha = \frac{a_1}{2a}$ និង

$\beta = \frac{b_1 - a\alpha}{a} = \frac{b_1 - a(a_1/2a)}{a} = \frac{2b_1 - a_1}{2a}$

ហើយ $r_1 = (\alpha+\beta)a = \alpha a + \beta a = b_1$ ។

តាមទ្រឹស្តីបទទី១ នោះតួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n) គឺ

$u_n = (u_1 - r_1)a^{n-1} + r_n$

$= (u_1 - b_1)a^{n-1} + (\alpha n + \beta)n a^n$

$= a^{n-1}[u_1 - b_1 + (\alpha n + \beta)n a]$

$= a^{n-1}[u_1 - b_1 + (\frac{a_1}{2a}\cdot n + \frac{2b_1 - a_1}{2a})n a]$

$= a^{n-1}[u_1 + \frac{a_1}{2}n(n-1) + b_1(n-1)]$ ពិត ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ ។

សម្គាល់

ខ្ញុំបានរៀបរៀងនូវទ្រឹស្តីបទទី៧ នៅថ្ងៃទី២៩ ខែមេសា ឆ្នាំ២០២៤។

ឥឡូវនេះ យើងអនុវត្តលើឧទាហរណ៍ពីរដោយប្រើទ្រឹស្តីបទទី៧ (រូបមន្ត (9) និង (10)) ។

ឧទាហរណ៍ទី៨

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែលកំណត់ដោយ $u_1 = 2$ និង $u_{n+1} = 5u_n + (3n+2)4^n$ ។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n) ។

យើងមានទំនាក់ទំនង $u_{n+1} = 5u_n + (3n+2)4^n$ និង $u_1 = 2$ ។ នាំឱ្យ $a = 5$ និង $g(n) = (3n+2)4^n$ ដែល $a_1 = 3, b_1 = 2$ និង $c = 4 \neq a$ ។

នាំឱ្យ $\alpha = \frac{a_1}{c-a} = \frac{3}{4-5} = -3$ និង

$\beta = \frac{b_1 - \alpha c}{c-a} = \frac{2-(-3)(4)}{4-5} = -14$ ។

តាមរូបមន្ត (9) យើងបានតួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n) គឺ

$u_n = [u_1 - (\alpha+\beta)c]a^{n-1} + (\alpha n + \beta)c^n$

$= [2-(-3-14)(4)]5^{n-1} + (-3n-14)4^n$

$= 70\cdot 5^{n-1} - (3n+14)4^n$ ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៩

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែលកំណត់ដោយ $u_1 = 3$ និង $u_{n+1} = 3u_n + (2n+5)3^n$ ។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n) ។

យើងមានទំនាក់ទំនង $u_{n+1} = 3u_n + (2n+5)3^n$ និង $u_1 = 3$ ។ នាំឱ្យ $a = 3$ និង $g(n) = (2n+5)3^n$ ដែល $a_1 = 2, b_1 = 5$ និង $c = 3 = a$ ។

តាមរូបមន្ត (10) យើងបានតួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n) គឺ

$u_n = a^{n-1}[u_1 + \frac{a_1}{2}n(n-1) + b_1(n-1)]$

$= 3^{n-1}[3 + \frac{2}{2}n(n-1) + 5(n-1)]$

$= 3^{n-1}(n^2 + 4n - 2)$ ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ ។

យើងសិក្សាស្វ៊ីតមានរាង $u_{n+1} = au_n + g(n)$ ដដែលក្នុងករណី $a \neq 0$ និង $g(n) = (a_1n^2 + b_1n + c_1)d^n$ ដែលបង្ហាញក្នុងទ្រឹស្តីបទទី៨។

ទ្រឹស្តីបទទី៨

គេមានស្វ៊ីតចំនួនពិត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} : u_1, u_2, ..., u_n, ...$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនងកំណើន

$u_{n+1} = au_n + (a_1n^2 + b_1n + c_1)d^n,\ a \neq 0$ ។

នោះគេបានតួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n) គឺ

$u_n = (u_1 - r_1)a^{n-1} + (\alpha n^2 + \beta n + \gamma)d^n$ (11)

ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}, d \neq a, \alpha = \frac{a_1}{d-a}, \beta = \frac{b_1 - 2d\alpha}{d-a},$

$\gamma = \frac{c_1 - d\alpha - d\beta}{d-a}, r_1 = a\gamma + c_1$

និង $u_n = a^{n-1}(a\alpha n^3 + a\beta n^2 + a\gamma n + u_1 - c_1)$ (12)

ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}, d = a, \alpha = \frac{a_1}{3a}, \beta = \frac{b_1 - a_1}{2a},$

$\gamma = \frac{6c_1 - 3b_1 + a_1}{6a}$ ។

សម្គាល់

ខ្ញុំបានរៀបរៀងនូវទ្រឹស្តីបទទី៨ នៅថ្ងៃទី១ ខែឧសភា ឆ្នាំ២០២៤។

ឥឡូវនេះ យើងអនុវត្តលើឧទាហរណ៍ពីរដោយប្រើទ្រឹស្តីបទទី៨ (រូបមន្ត (11) និង (12)) ។

ឧទាហរណ៍ទី១០

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែលកំណត់ដោយ $u_1=-1$ និង $u_{n+1}=7u_n+(3n^2+2n+1)5^n$ ។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅៈ

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n) ។

យើងមានទំនាក់ទំនង $u_{n+1}=7u_n+(3n^2+2n+1)5^n$

និង $u_1=-1$ ។ នាំឱ្យ $a=7$ និង $g(n)=(3n^2+2n+1)5^n$

ដែល $a_1=3, b_1=2, c_1=1$ និង $d=5\neq a$ ។

នាំឱ្យ $\alpha=\frac{a_1}{d-a}=\frac{3}{5-7}=-\frac{3}{2}$,

$\beta=\frac{b_1-2d\alpha}{d-a}=\frac{2-2(5)(-3/2)}{5-7}=-\frac{17}{2}$,

$\gamma=\frac{c_1-d\alpha-d\beta}{d-a}=\frac{1-5(-3/2)-5(-17/2)}{5-7}=-\frac{51}{2}$

និង $r_1=a\gamma+c_1=7(-51/2)+1=-\frac{355}{2}$ ។

តាមរូបមន្ត (11) យើងបានតួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n) គឺ

$$u_n=(u_1-r_1)a^{n-1}+(\alpha n^2+\beta n+\gamma)d^n$$

$$=(-1+\frac{355}{2})7^{n-1}+(-\frac{3}{2}n^2-\frac{17}{2}n-\frac{51}{2})5^n$$

$$=\frac{353}{2}7^{n-1}-\frac{5^n}{2}(3n^2+17n+51)$$

ចំពោះ $\forall n\in\mathbb{N}$ ។

ឧទាហរណ៍ទី១១

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែលកំណត់ដោយ $u_1=3$ និង $u_{n+1}=4u_n+(5n^2-3n+2)4^n$ ។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅៈ

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n) ។

យើងមានទំនាក់ទំនង $u_{n+1}=4u_n+(5n^2-3n+2)4^n$

និង $u_1=3$ ។ នាំឱ្យ $a=4$ និង $g(n)=(5n^2-3n+2)4^n$

ដែល $a_1=5, b_1=-3, c_1=2$ និង $d=4=a$ ។

នាំឱ្យ $\alpha=\frac{a_1}{3a}=\frac{5}{3(4)}=\frac{5}{12}$, $\beta=\frac{b_1-a_1}{2a}=\frac{-3-5}{2(4)}=-1$,

$\gamma=\frac{6c_1-3b_1+a_1}{6a}=\frac{6(2)-3(-3)+5}{6(4)}=\frac{13}{12}$ ។

តាមរូបមន្ត (12) យើងបានតួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n) គឺ

$$u_n=a^{n-1}(a\alpha n^3+a\beta n^2+a\gamma n+u_1-c_1)$$

$$=4^{n-1}[4(\frac{5}{12})n^3+4(-1)n^2+4(\frac{13}{12})n+3-2]$$

$$=\frac{4^{n-1}}{3}(5n^3-12n^2+13n+3)$$ ចំពោះ $\forall n\in\mathbb{N}$ ។

យើងសិក្សាស្វ៊ីតមានរាង $u_{n+1}=au_n+g(n)$ ដដែលក្នុងករណី $a\neq 0,1$ និង $g(n)=a_1n^3+b_1n^2+c_1n+d_1$ ដែលបង្ហាញក្នុងទ្រឹស្តីបទទី៩។

ទ្រឹស្តីបទទី៩

គេមានស្វ៊ីតចំនួនពិត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}:u_1,u_2,...,u_n,...$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនងកំណើន

$$u_{n+1}=au_n+a_1n^3+b_1n^2+c_1n+d_1,\ a\neq 0,1$$ ។

នោះគេបានតួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n) គឺ

$$u_n=(u_1-a\varphi-d_1)a^{n-1}+\alpha n^3+\beta n^2+\gamma n+\varphi \quad (13)$$

ចំពោះ $\forall n\in\mathbb{N}$, $\alpha=\frac{a_1}{1-a}$, $\beta=\frac{b_1-3\alpha}{1-a}$,

$\gamma=\frac{c_1-3\alpha-2\beta}{1-a}$, $\varphi=\frac{d_1-\alpha-\beta-\gamma}{1-a}$ ។

សម្គាល់

ខ្ញុំបានរៀបរៀងនូវទ្រឹស្តីបទទី៩ នៅថ្ងៃទី១ ខែឧសភា ឆ្នាំ២០២៤។

ឥឡូវនេះ យើងអនុវត្តលើឧទាហរណ៍មួយដោយប្រើទ្រឹស្តីបទទី៩ (រូបមន្ត (13)) ។

ឧទាហរណ៍ទី១២

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែលកំណត់ដោយ $u_1=3$ និង $u_{n+1}=3u_n+12n^3+6n^2-4n+8$ ។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n) ។

យើងមានទំនាក់ទំនង $u_{n+1}=3u_n+12n^3+6n^2-4n+8$ និង $u_1=3$ ។ នាំឱ្យ $a=3$ និង $g(n)=12n^3+6n^2-4n+8$ ដែល $a_1=12, b_1=6$, $c_1=-4$ និង $d_1=8$ ។

នាំឱ្យ $\alpha=\dfrac{a_1}{1-a}=\dfrac{12}{1-3}=-6$,

$$\beta=\frac{b_1-3\alpha}{1-a}=\frac{6-3(-6)}{1-3}=-12,$$

$$\gamma=\frac{c_1-3\alpha-2\beta}{1-a}=\frac{-4-3(-6)-2(-12)}{1-3}=-19$$

និង $\varphi=\dfrac{d_1-\alpha-\beta-\gamma}{1-a}=\dfrac{8+6+12+19}{1-3}=-\dfrac{45}{2}$ ។

តាមរូបមន្ត (13) យើងបានតួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n) គឺ

$$u_n=(u_1-a\varphi-d_1)a^{n-1}+\alpha n^3+\beta n^2+\gamma n+\varphi$$

$$=[3-3(-\frac{45}{2})-8]3^{n-1}-6n^3-12n^2-19n-\frac{45}{2}$$

$$=\frac{125}{2}3^{n-1}-6n^3-12n^2-19n-\frac{45}{2}$$

ចំពោះ $\forall n\in\mathbb{N}$ ។

យើងសិក្សាស្វ៊ីតមានរាង $u_{n+1}=au_n+g(n)$ ដដែលក្នុងករណី $a\neq 0$ និង $g(n)=(a_1n^3+b_1n^2+c_1n+d_1)b^n$ ដែលបង្ហាញក្នុងទ្រឹស្តីបទទី១០។

ទ្រឹស្តីបទទី១០

គេមានស្វ៊ីតចំនួនពិត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}: u_1, u_2, ..., u_n, ...$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនងកំណើន

$$u_{n+1}=au_n+(a_1n^3+b_1n^2+c_1n+d_1)b^n,\ a\neq 0 \text{ ។}$$

នោះគេបានតួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n) គឺ

$$u_n=(u_1-r_1)a^{n-1}+(\alpha n^3+\beta n^2+\gamma n+\varphi)b^n \quad (14)$$

ចំពោះ $\forall n\in\mathbb{N}, b\neq a, \alpha=\dfrac{a_1}{b-a}, \beta=\dfrac{b_1-3b\alpha}{b-a}$,

$$\gamma=\frac{c_1-3b\alpha-2b\beta}{b-a}, \varphi=\frac{d_1-b\alpha-b\beta-b\gamma}{b-a},$$

$r_1=a\varphi+d_1$ និង

$$u_n=a^{n-1}(a\alpha n^4+a\beta n^3+a\gamma n^2+a\varphi n+u_1-d_1) \quad (15)$$

ចំពោះ $\forall n\in\mathbb{N}, b=a, \alpha=\dfrac{a_1}{4a}, \beta=\dfrac{2b_1-3a_1}{6a}$,

$\gamma=\dfrac{2c_1-2b_1+a_1}{4a}, \varphi=\dfrac{6d_1-3c_1+b_1}{6a}$ ។

សម្គាល់

ខ្ញុំបានរៀបរៀងនូវទ្រឹស្តីបទទី១០ នៅថ្ងៃទី៥ ខែមិថុនា ឆ្នាំ២០២៤។

ឥឡូវនេះ យើងអនុវត្តលើឧទាហរណ៍ពីរដោយប្រើទ្រឹស្តីបទទី១០ (រូបមន្ត (14) និង (15)) ។

ឧទាហរណ៍ទី១៣

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែលកំណត់ដោយ $u_1=1$ និង $u_{n+1}=2u_n+(4n^3-3n^2+2n-1)3^n$ ។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n) ។

យើងមានទំនាក់ទំនង

$u_{n+1}=2u_n+(4n^3-3n^2+2n-1)3^n$ និង $u_1=1$ ។

នាំឱ្យ $a=2$ និង $g(n)=(4n^3-3n^2+2n-1)3^n$ ដែល $a_1=4, b_1=-3,\ c_1=2, d_1=-1$ និង $b=3\neq a$ ។

នាំឱ្យ $\alpha=\dfrac{a_1}{b-a}=\dfrac{4}{3-2}=4$,

$$\beta=\frac{b_1-3b\alpha}{b-a}=\frac{-3-3(3)(4)}{3-2}=-39,$$

$\gamma=\dfrac{c_1-3b\alpha-2b\beta}{b-a}=\dfrac{2-3(3)(4)-2(3)(-39)}{3-2}=200,$

$\varphi=\dfrac{d_1-b\alpha-b\beta-b\gamma}{b-a}=\dfrac{-1-3(4)-3(-39)-3(200)}{3-2}$

$=-496$ និង $r_1=a\varphi+d_1=2(-496)-1=-993$ ។

តាមរូបមន្ត (14) យើងបានតួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n) គឺ

$u_n=(u_1-r_1)\,a^{n-1}+(\alpha n^3+\beta n^2+\gamma n+\varphi)b^n$

$=(1+993)\,2^{n-1}+(4n^3-39n^2+200n-496)3^n$

$=994\cdot 2^{n-1}+(4n^3-39n^2+200n-496)3^n$

ចំពោះ $\forall n\in\mathbb{N}$ ។

ឧទាហរណ៍ទី១៤

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែលកំណត់ដោយ $u_1=-2$ និង $u_{n+1}=2u_n+2^n(5n^3+4n^2-3n-2)$ ។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n) ។

យើងមានទំនាក់ទំនង

$u_{n+1}=2u_n+2^n(5n^3+4n^2-3n-2)$ និង $u_1=-2$ ។

នាំឱ្យ $a=2$ និង $g(n)=2^n(5n^3+4n^2-3n-2)$

ដែល $a_1=5,\ b_1=4,\ c_1=-3,\ d_1=-2$ និង $b=2=a$ ។

នាំឱ្យ $\alpha=\dfrac{a_1}{4a}=\dfrac{5}{4(2)}=\dfrac{5}{8},$

$\beta=\dfrac{2b_1-3a_1}{6a}=\dfrac{2(4)-3(5)}{6(2)}=-\dfrac{7}{12},$

$\gamma=\dfrac{2c_1-2b_1+a_1}{4a}=\dfrac{2(-3)-2(4)+5}{4(2)}=-\dfrac{9}{8},$

និង $\varphi=\dfrac{6d_1-3c_1+b_1}{6a}=\dfrac{6(-2)-3(-3)+4}{6(2)}=\dfrac{1}{12}$ ។

តាមរូបមន្ត (15) យើងបានតួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n) គឺ

$u_n=a^{n-1}(a\alpha n^4+a\beta n^3+a\gamma n^2+a\varphi n+u_1-d_1)$

$=2^{n-1}(2\cdot\dfrac{5}{8}n^4+2\cdot\dfrac{-7}{12}n^3+2\cdot\dfrac{-9}{8}n^2+2\cdot\dfrac{1}{12}n-2+2)$

$=2^{n-1}(\dfrac{5}{4}n^4-\dfrac{7}{6}n^3-\dfrac{9}{4}n^2+\dfrac{1}{6}n)$ ចំពោះ $\forall n\in\mathbb{N}$ ។

សរុបមក អត្ថបទស្រាវជ្រាវនេះ នឹងផ្តល់ចំណេះដឹងនូវទ្រឹស្តីបទចំនួនដប់ និងដំណោះស្រាយនូវឧទាហរណ៍មួយចំនួន។ ក្នុងទ្រឹស្តីបទទាំងដប់នេះ យើងខ្ញុំសិក្សាស្រាវជ្រាវ និងរៀបរៀងបានរូបមន្តតួទី n នៃស្វ៊ីតចំនួន ១៥ ដើម្បីចូលរួមចំណែកក្នុងការអភិវឌ្ឍចំណេះដឹងខាងផ្នែកទ្រឹស្តីគណិតវិទ្យាលើវិស័យអប់រំ តែបើមានរូបមន្តណាមួយក្នុងចំណោមរូបមន្តទាំង១៥នេះត្រូវបានគេសរសេរនៅកាលបរិច្ឆេទមុនជាផ្លូវការរួចហើយ នោះយើងខ្ញុំនឹងដកវាចេញវិញ។ ជាចុងក្រោយ យើងខ្ញុំសង្ឃឹមថា អត្ថបទនេះ ជាឯកសារដ៏សំខាន់មួយសម្រាប់ជួយសម្រួលដល់សិស្ស និស្សិត លោកគ្រូ អ្នកគ្រូ និងអ្នកស្រាវជ្រាវ ក្នុងការរកតួទី n នៃស្វ៊ីតឱ្យបានលឿនជាងមុន នៅកម្រិតមធ្យមសិក្សា និងឧត្តមសិក្សា។

ឯកសារពិគ្រោះ

ភាសាខ្មែរ

-ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា(២០០៩) សៀវភៅ« គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១១ កម្រិតមូលដ្ឋាន » ការផ្សាយរបស់ គ្រឹះស្ថានបោះពុម្ពនិងចែកផ្សាយ ភ្នំពេញ។

-ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា(២០០៩) សៀវភៅ« គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១១ កម្រិតខ្ពស់ » ការផ្សាយរបស់ គ្រឹះស្ថានបោះពុម្ពនិងចែកផ្សាយ ភ្នំពេញ។

គេហទំព័រ

http://rac.gov.kh/royal-academy/listing/attachments/original/130.pdf?1616763090

https://byjus.com/maths/sequence-and-series/

https://courses.lumenlearning.com/boundless-algebra/chapter/sequences-and-series/

http://pdfs.cpm.org/state_supplements/Sequences.pdf

https://en.wikipedia.org/wiki/Sequence

https://amsi.org.au/ESA_Senior_Years/PDF/Sequences1d.pdf

(4) ការរកតួទី n... - រាជបណ្ឌិត្យសភាកម្ពុជា - Royal Academy of Cambodia | Facebook

https://www.facebook.com/rac.gov.kh/posts/pfbid037VJiTqGLsSowyRBtPtRAXaN1v2kdCVeb35H8jWqSrHJ2P7KtFp8YU2FsscWRyAHZl?__cft__[0]=AZUaULuWHWKaCHNrGoeUVluZ2XRR4YgOyAPWIXtSUT8o4nj3aES5budJZ352IbMcvYR4DfZ-IVefEAkelabriSvZN_xMyj63Yomplq-u5WXHATIjOsvFDuf-HDLz8vwJxE9YdytGbcipEU6CvCXX44spH0Yda28V_0iQg3lM2VoD9w&__tn__=%2CO%2CP-R

(3) ការរកតួទី n... - រាជបណ្ឌិត្យសភាកម្ពុជា - Royal Academy of Cambodia | Facebook

https://l.facebook.com/l.php?u=https%3A%2F%2Ft.me%2Fracnews%2F13881%3Ffbclid%3DIwZXh0bgNhZW0CMTAAYnJpZBExcWZ3dXU2eGpLRnpUZHdnS3NydGMGYXBwX2lkEDIyMjAzOTE3ODgyMDA4OTIAAR5kLjz2UwIvogYLuH3gAcBMJseV4BG1YGeMufbsEGvKtdRPIdHybAoQEQKyQQ_aem_jLKF0s5tghVd1FT9Tzcv_g&h=AT2x0kMQv117E_0twzD1NUTRZWU3eBpXJGN1ogheR5XghAJt-kDepa4YmazxLLMIl9BzFkJOHZySfZHGbYtPU-TCZRW9m0dFuFxqnW4d_r7AmDtC-VBRCtDYJuVKpus558MKvgDnNtVRbr5g&__tn__=-UK-R&c[0]=AT3MqAI9vwtwcAN41GQaUxW1lSL0T9PK-yBef0etJ-AgSE1ScZpkPmjnLjwa1_uVNb8GWZ5l9z0NjyGOewnli_kZlwI87aQ0CcdlUrbHu2nYoUjPJKCWN1vRGiRj86_DTJzxw_WCYiQgXLS1Wb6dJvcJfBErs0fhrLPPVmyMkxUL-a_75miBZpyKKDh5ITs