



រាជបណ្ឌិត្យសភាកម្ពុជា

ROYAL ACADEMY OF CAMBODIA

វិទ្យាស្ថានវិទ្យាសាស្ត្រនិងបច្ចេកវិទ្យា
ផ្នែកគណិតវិទ្យានិងស្ថិតិ

សិក្សាប្រភេទអាំងតេក្រាលមួយចំនួន
ក្នុងវិស័យគណិតវិទ្យានិងវិទ្យាសាស្ត្រ

*(Study of Some Integral Types In
Mathematics and Science)*

សិក្សារៀបរៀងដោយ យីម អេយុវឌ្ឍនៈវិជ្ជា

ឆ្នាំពេញ ២០១៦



សិក្សាប្រភេទអាំងតេក្រាលមួយចំនួន ក្នុងវិស័យគណិតវិទ្យានិងវិទ្យាសាស្ត្រ

*(Study of Some Integral Types In
Mathematics and Science)*

គណៈកម្មការរៀបចំការបោះពុម្ព

បណ្ឌិត អ៊ឹម បុណ្ណា

បណ្ឌិត ហាង ធីតា

សិក្សាប្រភេទ

យ៉ែម អាយុវឌ្ឍនៈវិទ្យា

រក្សាសិទ្ធិដោយរាជបណ្ឌិតសភាកម្ពុជា

ធ្វើនៅភ្នំពេញ ខែកញ្ញា ឆ្នាំ២០១៦



ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ទីស្តីការគណៈរដ្ឋមន្ត្រី
រាជធានីភ្នំពេញ

Royal Academy of Cambodia
Académie Royale du Cambodge

បុព្វកថា

សៀវភៅស្តីពី << សិក្សាប្រភេទអាំងតេក្រាលមួយចំនួនក្នុងវិស័យគណិតវិទ្យានិងវិទ្យាសាស្ត្រ >> នេះ ជាសៀវភៅដែលលោក យឹម អាយុវឌ្ឍនៈវិជ្ជា បានធ្វើការស្រាវជ្រាវ បកប្រែ ដោះស្រាយអាំងតេក្រាលតាមប្រភេទ រៀបរៀងនិងចងក្រងឡើង ដើម្បីទុកជាស្នាដៃថ្មីមួយ ទៀតសម្រាប់សិស្ស និស្សិតនិងអ្នកស្រាវជ្រាវគណិតវិទ្យានិងវិទ្យាសាស្ត្រ។

កន្លងមកស្នាដៃស្រាវជ្រាវដែលត្រូវបានបោះពុម្ពជាភាសាខ្មែរដែលទាក់ទងទៅនឹងការ យល់ដឹងអំពីប្រភេទអាំងតេក្រាលនិងវិធីសាស្ត្រដោះស្រាយវាគឺមានតិចតួចណាស់។

ដូចនេះ សៀវភៅស្តីពី << សិក្សាប្រភេទអាំងតេក្រាលមួយចំនួនក្នុងវិស័យគណិតវិទ្យា និងវិទ្យាសាស្ត្រ >> ជាស្នាដៃថ្មីមួយដែលមានសារៈប្រយោជន៍ឆ្លើយតបទៅនឹងតម្រូវការជាចាំ បាច់ខាងលើនេះ។ ខ្លឹមសារនៃសៀវភៅនេះបានបង្ហាញជូនលោកអ្នកអាននិងអ្នកស្រាវជ្រាវនូវ វិធីសាស្ត្រដោះស្រាយទៅតាមប្រភេទអាំងតេក្រាលមួយចំនួននិងរបៀបប្រើប្រាស់រូបមន្តអាំង តេក្រាល។ ខ្ញុំសង្ឃឹមថា លោកអ្នកអាននិងអ្នកស្រាវជ្រាវចេះគណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ និងកំណត់ដោយប្រើប្រាស់រូបមន្តអាំងតេក្រាលទាំងនេះទៅជាកាតព្វកិច្ចស្រួល។ ជាងនេះទៅ ទៀត ខ្ញុំសង្ឃឹមថាលោក យឹម អាយុវឌ្ឍនៈវិជ្ជា ប្រាកដជាខិតខំស្រាវជ្រាវបន្តទៀត ដើម្បីចែក រំលែកបទពិសោធន៍និងចំណេះដឹងដល់យើងទាំងអស់គ្នានិងអ្នកស្រាវជ្រាវជំនាន់ក្រោយ។

ជាមួយគ្នានេះ ក្នុងនាមរាជបណ្ឌិត្យសភាកម្ពុជា នាងខ្ញុំសូមគោរពថ្លែងអំណរគុណ ចំពោះ សម្តេចតេជោបណ្ឌិតសភាចារ្យ ហ៊ុន សែន នាយករដ្ឋមន្ត្រីនៃព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា និង ឯកឧត្តមបណ្ឌិតសភាចារ្យ សុខ អាន ឧបនាយករដ្ឋមន្ត្រី រដ្ឋមន្ត្រីទទួលបន្ទុកទីស្តីការ គណៈរដ្ឋមន្ត្រី ដែលតែងតែគាំទ្រដល់បេសកកម្មរបស់រាជបណ្ឌិត្យសភាកម្ពុជា ចំពោះកិច្ចការ ស្រាវជ្រាវនិងការបោះពុម្ពផ្សាយ។

រាជធានីភ្នំពេញ ថ្ងៃទី០៦ ខែកញ្ញា ឆ្នាំ២០១៦ ✓
ប្រធានរាជបណ្ឌិត្យសភាកម្ពុជា



បណ្ឌិតសភាចារ្យ ខួន ធីតា

ចំណាប់អារម្មណ៍
របស់ឯកឧត្តមបណ្ឌិត តិច បុណ្ណា

ខ្ញុំមានសេចក្តីសោមនស្សរីករាយដោយបានឃើញនូវខ្លឹមសារនៃសៀវភៅស្តីពី << សិក្សាប្រភេទអាំងតេក្រាលមួយចំនួនក្នុងវិស័យគណិតវិទ្យានិងវិទ្យាសាស្ត្រ >> របស់លោក យឹម អាយុវឌ្ឍនៈវិជ្ជា ដែលជាអ្នកវិទ្យាសាស្ត្រផ្នែកគណិតវិទ្យានិងស្ថិតិនៃវិទ្យាស្ថានវិទ្យាសាស្ត្រនិងបច្ចេកវិទ្យា។

សៀវភៅនេះ ជាស្នាដៃថ្មីមួយដែលមានប្រយោជន៍សម្រាប់សិស្ស និស្សិតនិងអ្នកស្រាវជ្រាវក្នុងវិស័យគណិតវិទ្យានិងវិទ្យាសាស្ត្រ។ ខ្លឹមសារនៃសៀវភៅនេះបានបង្ហាញជូនលោកអ្នកអាននិងអ្នកស្រាវជ្រាវនូវវិធីសាស្ត្រដោះស្រាយទៅតាមប្រភេទអាំងតេក្រាលមួយចំនួននិងរបៀបប្រើប្រាស់រូបមន្តអាំងតេក្រាល។ ជាងនេះទៅទៀត ខ្ញុំសង្ឃឹមថាលោក យឹម អាយុវឌ្ឍនៈវិជ្ជា ប្រាកដជាខិតខំស្រាវជ្រាវបន្តទៅទៀត ដើម្បីចែករំលែកបទពិសោធន៍និងចំណេះដឹងដល់យើងទាំងអស់គ្នានិងអ្នកស្រាវជ្រាវជំនាន់ក្រោយបន្ថែមទៀត។

ជាមួយនឹងវិភាគទានដ៏ថ្លៃថ្លាក្នុងវិស័យគណិតវិទ្យារបស់លោក យឹម អាយុវឌ្ឍនៈវិជ្ជា ការសិក្សាស្រាវជ្រាវនេះបានផ្តល់ចំណេះដឹងខាងទ្រឹស្តីនិងគណនាក្នុងការអភិវឌ្ឍវិស័យវិទ្យាសាស្ត្រថែមទៀត។

រាជធានីភ្នំពេញ, ថ្ងៃទី០៥ ខែកញ្ញា ឆ្នាំ២០១៦
ប្រធានវិទ្យាស្ថានវិទ្យាសាស្ត្រនិងបច្ចេកវិទ្យា


បណ្ឌិត.តិច-បុណ្ណា

សេចក្តីថ្លែងអំណរគុណ

ខ្ញុំសូមថ្លែងអំណរគុណយ៉ាងជ្រាលជ្រៅចំពោះឯកឧត្តមបណ្ឌិត អ៊ាប បុណ្ណា ប្រធានវិទ្យាស្ថានវិទ្យាសាស្ត្រនិងបច្ចេកវិទ្យា និង បណ្ឌិត ហាក់ ជីរោ អនុប្រធានវិទ្យាស្ថានវិទ្យាសាស្ត្រនិងបច្ចេកវិទ្យាដែលបានជួយត្រួតពិនិត្យ កែសម្រួលនិងអនុម័តស្នាដៃនេះឱ្យបានចេញជារូបរាងឡើង។

ខ្ញុំសូមថ្លែងអំណរគុណជាពន្លឹកចំពោះបណ្ឌិតសភាចារ្យ ខ្លួត ជីតា ប្រធានរាជបណ្ឌិត្យសភាកម្ពុជា បណ្ឌិតសភាចារ្យ ស៊ី ឈុំប៊ុន អនុប្រធានរាជបណ្ឌិត្យសភាកម្ពុជា ឯកឧត្តម លី សុផិវត្ថ អគ្គលេខាធិការនៃរាជបណ្ឌិត្យសភាកម្ពុជា និងសហការីទាំងអស់ដែលបានជួយរៀបចំកិច្ចការរដ្ឋបាលនិងហិរញ្ញវត្ថុសម្រាប់ស្នាដៃនេះ។

សូមថ្លែងអំណរគុណចំពោះសាស្ត្រាចារ្យ បណ្ឌិតនិងទស្សនវិទូគណិតវិទ្យាទាំងឡាយដែលបានខិតខំស្រាវជ្រាវទ្រឹស្តីប្បបទគណិតវិទ្យា ហើយបានចងក្រងជាសៀវភៅយ៉ាងច្រើនទុកឯកសារស្រាវជ្រាវដល់កូនចៅជំនាន់ក្រោយ។

អ្នកសិក្សារៀបរៀង

យឹម អេយ្យុវឌ្ឍនៈវិជ្ជា

តំណាងផ្នែកគណិតវិទ្យានិងស្ថិតិ

មាតិកា

ទំព័រ

សេចក្តីផ្តើមអំណរគុណ	i
មាតិកា	ii
អារម្ភកថា	viii
សេចក្តីផ្តើម	ix
ជំពូកទី១ ទ្រឹស្តីទំនាក់ទំនង	១
១.១ ព្រីមីទីវ	១
១.១.១ និយមន័យ	១
១.១.២ ទ្រឹស្តីបទ	២
១.២ អាំងតេក្រាលមិនកំណត់	២
១.២.១ និយមន័យ	២
១.២.២ រូបមន្តគ្រឹះនៃអាំងតេក្រាលមិនកំណត់	២
១.២.៣ រូបមន្តចាយនៃអាំងតេក្រាលមិនកំណត់	៤
១.៣ អាំងតេក្រាលកំណត់	៦
១.៣.១ និយមន័យ	៦
១.៣.២ រូបមន្តគ្រឹះនៃអាំងតេក្រាលកំណត់	៩
១.៣.៣ ទ្រឹស្តីបទ Newton-Leibnitz	១១
១.៤ វិធីប្តូរអថេរ	១៤
១.៥ វិធីអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក	១៧
១.៦ អាំងតេក្រាល Improper	១៨
ជំពូកទី២ ប្រភេទអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍សនិទាន	២៣
២.១ ការបំបែកអនុគមន៍សនិទានក្នុង $\mathbb{R}$	២៣

២.២ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍សនិទានរាង $\int \frac{1}{(ax+b)^n} dx$	២៧
២.៣ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍សនិទានរាង $\int \frac{dx}{x^2 \pm a^2}$	២៨
២.៤ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍សនិទានរាង $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$	៣០
២.៥ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍សនិទានរាង $\int \frac{(a_1x + b_1) dx}{ax^2 + bx + c}$	៣៣
២.៦ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍សនិទានរាង $\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^m}$	៣៧
២.៧ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍សនិទានរាង $\int \frac{dx}{(x^2 - a^2)^m}$	៣៩
២.៨ អនុវត្តន៍នៃការបំប្លែងអនុគមន៍សនិទាន	៤១
ជំពូកទី៣ ប្រភេទអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អសនិទាន	៤៤
៣.១ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អសនិទានរាង $\int \frac{1}{\sqrt[n]{ax+b}} dx$	៤៤
៣.២ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អសនិទានរាង $\int \sqrt[n]{ax+b} dx$	៤៥
៣.៣ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អសនិទានរាង $\int \sqrt[n]{(ax+b)^m} dx$	៤៦
៣.៤ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អសនិទានរាង $\int \frac{1}{\sqrt{k-x^2}} dx$	៤៧
៣.៥ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អសនិទានរាង $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+k}} dx$	៤៨
៣.៦ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អសនិទានរាង $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-k}} dx$	៥០
៣.៧ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អសនិទានរាង $\int \sqrt{k-x^2} dx$	៥១
៣.៨ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អសនិទានរាង $\int \sqrt{x^2+k} dx$	៥៣

៣.៩ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អសនិទានរាង $\int \sqrt{x^2 - k} \, dx$ ៥៥

៣.១០ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អសនិទានរាង $\int (\alpha x + \beta) \sqrt{ax + b} \, dx$..៥៧

៣.១១ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អសនិទានរាង $\int \frac{dx}{(\alpha x + \beta) \sqrt{ax + b}}$ ៥៧

៣.១២ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អសនិទានរាង $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ ៥៩

៣.១៣ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អសនិទានរាង $\int \sqrt{ax^2 + bx + c} \, dx$ ៦៣

៣.១៤ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អសនិទានរាង $\int \frac{(\alpha x + \beta) dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ ៦៦

ជំពូកទី៤ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល ៦៩

៤.១ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលរាង $\int a^{\alpha x + \beta} \, dx$ ៦៩

៤.២ អាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលរាង $\int \frac{dx}{p + a^{\alpha x}}$ ៧៣

៤.៣ អាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលរាង $\int \frac{dx}{(p + a^{\alpha x})^2}$.៧៤

៤.៤ អាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលរាង $\int \frac{a^{2\alpha x} dx}{p + qa^{\alpha x}}$ ៧៧

៤.៥ អាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលរាង $\int \frac{dx}{pa^{\alpha x} + qa^{-\alpha x}}$ ៧៩

៤.៦ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលរាង $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \, dx$ ៨១

៤.៧ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលរាង $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2 + bx + c)} \, dx$ ៨៣

ជំពូកទី៥ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍លោការីត.....៨៦

៥.១ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍លោការីតិក $\int \log_a(p x + q) dx$ ៨៦

៥.២ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍លោការីតិក $\int \log_a|p x + q| dx$ ៨៩

៥.៣ អាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍លោការីតិក $\int \log_a^2(p x + q) dx$ ៩២

៥.៤ អាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍លោការីតិក $\int \log_a^2|p x + q| dx$ ៩៤

៥.៥ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍លោការីតិក $\int \log_a(x^2 + b^2) dx$ ៩៦

៥.៦ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍លោការីតិក $\int \log_a(x^2 - b^2) dx$ ៩៨

ជំពូកទី៦ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់១០៣
ស្វ័យគុណអនុគមន៍ស្វ័យគុណ

៦.១ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមាន $\int x e^{\alpha x} dx$ និង $\int x a^{\alpha x} dx$ ១០៣

៦.២ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមាន $\int x^2 e^{\alpha x} dx$ និង $\int x^2 a^{\alpha x} dx$ ១០៥

៦.៣ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមាន $\int x^n e^{\alpha x} dx$ ១០៨

៦.៤ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមាន $\int x^{-1} e^{\alpha x} dx$ ១០៩

៦.៥ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមាន $\int x e^{\alpha x^2} dx$ និង $\int x a^{\alpha x^2} dx$ ១១២

៦.៦ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមាន $\int x^{-2} e^{-\alpha x^2} dx$ ១១៤

៦.៧ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមាន $\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-a(x-b)^2} dx$ ១១៥

៦.៨ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមេកាណិក $\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-a x^2+b x} dx \dots\dots\dots ១១៧$

៦.៩ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមេកាណិក $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-a x^2} dx \dots\dots\dots ១១៨$

៦.១០ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមេកាណិក $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-a x^2-b x} dx \dots\dots\dots ១២០$

៦.១១ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមេកាណិក $\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-a x^2+b x} dx \dots\dots\dots ១២២$

ជំពូកទី៧ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមេកាណិកអនុគមន៍លោការីត និងអនុគមន៍ស្វ័យគុណ

៧.១ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមេកាណិក $\int x^m \ln x dx \dots\dots\dots ១២៥$

៧.២ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមេកាណិក $\int \frac{(\ln(ax))^n}{x} dx \dots\dots\dots ១២៧$

៧.៣ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមេកាណិក $\int \frac{\ln(ax)^n}{x} dx \dots\dots\dots ១២៩$

៧.៤ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមេកាណិក $\int \frac{\ln(ax)}{x^m} dx \dots\dots\dots ១៣១$

៧.៥ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមេកាណិក $\int \frac{dx}{x[\ln(ax)]^n} \dots\dots\dots ១៣៣$

៧.៦ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមេកាណិក $\int \frac{dx}{x^m \ln x} \dots\dots\dots ១៣៥$

៧.៧ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមេកាណិក $\int x^m (\ln x)^n dx \dots\dots\dots ១៣៧$

៧.៨ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមេកាណិក $\int \frac{x^m}{(\ln x)^n} dx \dots\dots\dots ១៤១$

ជំពូកទី៨ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមេកាណិកអនុគមន៍អ៊ិប៉ូឡូមីក១៤៥

៨.១ អនុគមន៍អ៊ីពែបូលីក	១៤៥
៨.១.១ និយមន័យ	១៤៥
៨.១.២ លក្ខណៈ	១៤៦
៨.២ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមានរាង $\int \sinh(ax) dx$	១៤៥
៨.៣ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមានរាង $\int \cosh(ax) dx$	១៥១
៨.៤ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមានរាង $\int \sinh^2(ax) dx$	១៥២
៨.៥ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមានរាង $\int \cosh^2(ax) dx$	១៥៥
៨.៦ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមានរាង $\int \tanh(ax) dx$	១៥៧
៨.៧ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមានរាង $\int \coth(ax) dx$	១៥៩
៨.៨ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមានរាង $\int \operatorname{sech}(ax) dx$	១៦១
៨.៩ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមានរាង $\int \operatorname{cosech}(ax) dx$	១៦៤
៨.១០ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមានរាង $\int \frac{dx}{\cosh^2(ax)}$	១៦៧
៨.១១ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមានរាង $\int \frac{dx}{\sinh^2(ax)}$	១៦៩
ការសន្និដ្ឋាន	១៧៣
ឯកសារយោង	១៧៦

អារម្ភកថា

លោកអ្នកសិក្សាគណិតវិទ្យាអាចដឹងហើយថា អាំងតេក្រាលជាផ្នែកមួយនៃគណិតវិទ្យាដែលមានការស្មុគស្មាញទាំងទ្រឹស្តីនិងគណនាដល់អ្នកសិក្សា។ ប៉ុន្តែផ្នែកមួយនេះគេមិនអាចដកវាចេញបានឡើយសម្រាប់អ្នកសិក្សានិងស្រាវជ្រាវក្នុងវិស័យគណិតវិទ្យានិងវិទ្យាសាស្ត្រ។ ម្យ៉ាងទៀត នៅក្នុងប្រទេសកម្ពុជា ឯកសារឬសៀវភៅដែលត្រូវបានបោះពុម្ពជាភាសាខ្មែរហើយដែលទាក់ទងទៅនឹងការយល់ដឹងអំពីប្រភេទអាំងតេក្រាលនិងវិធីសាស្ត្រដោះស្រាយវាគឺមានតិចតួចបំផុត។

ដោយសារមូលហេតុនេះហើយទើបខ្ញុំបានកំណត់យកប្រធានបទមួយមកបកស្រាយគឺ << សិក្សាប្រភេទអាំងតេក្រាលមួយចំនួនក្នុងវិស័យគណិតវិទ្យានិងវិទ្យាសាស្ត្រ >>។ សៀវភៅនេះត្រូវបានស្រាវជ្រាវ បកប្រែ ដោះស្រាយអាំងតេក្រាលតាមប្រភេទនិងរៀបរៀងឡើង ដើម្បីទុកជាឯកសារស្រាវជ្រាវនិងជាចំណេះដឹងមួយសម្រាប់សិស្ស និស្សិត និង អ្នកស្រាវជ្រាវគណិតវិទ្យាដែលមានបញ្ហាខ្លះៗទាក់ទងនឹងប្រធានបទនេះ។

សៀវភៅនេះរួមមាន៨ជំពូក។ ជំពូកទី១សិក្សាអំពីទ្រឹស្តីទាក់ទង ជំពូកទី២សិក្សាអំពីប្រភេទអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍សនិទាន ជំពូកទី៣សិក្សាអំពីប្រភេទអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អសនិទាន ជំពូកទី៤សិក្សាអំពីប្រភេទអាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍អ៊ីចស្ត្រូណង់ស្យែល ជំពូកទី៥សិក្សាអំពីប្រភេទអាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍លោការីត ជំពូកទី៦សិក្សាអំពីប្រភេទអាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍អ៊ីចស្ត្រូណង់ស្យែលនិងអនុគមន៍ស្វ័យគុណ ជំពូកទី៧សិក្សាអំពីប្រភេទអាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍លោការីតនិងអនុគមន៍ស្វ័យគុណ និងជំពូកទី៨សិក្សាអំពីប្រភេទអាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍អ៊ីពែបូលីក។

សរុបសេចក្តីមក ខ្ញុំសង្ឃឹមនិងជឿជាក់ថា មិត្តអ្នកអាន និង អ្នកសិក្សាស្រាវជ្រាវគណិតវិទ្យាពិតជាទទួលបាននូវផលប្រយោជន៍និងជោគជ័យក្នុងកិច្ចការសិក្សាជាមិនខានពីសៀវភៅនេះ។

រាជបណ្ឌិត្យសភាកម្ពុជា ថ្ងៃទី០៧ ខែកញ្ញា ឆ្នាំ២០១៦

អ្នកសិក្សារៀបរៀង

យឹម អេយ្យុនឌុន:វិជ្ជា

តំណាងផ្នែកគណិតវិទ្យានិងស្ថិតិ

សេចក្តីផ្តើម

បច្ចុប្បន្ននេះ វិទ្យាសាស្ត្រនិងបច្ចេកវិទ្យាកាន់តែរីកចម្រើនទៅមុខឥតឈប់ឈរមែនក៏នៅតែពឹងផ្អែកលើរូបមន្តឬវិធីសាស្ត្រនានានៃជំនាញគណិតវិទ្យា។ ក្នុងគណិតវិទ្យាមានប្រភេទនិងវិធីសាស្ត្រជាច្រើន ប៉ុន្តែខ្ញុំលើកយកតែប្រភេទនិងវិធីសាស្ត្រគណនាមួយផ្នែកប៉ុណ្ណោះក្នុងគណិតវិទ្យាគណនាមកសិក្សាស្រាវជ្រាវនិងរៀបរៀង។ ម្យ៉ាងទៀត សិស្សនិងនិស្សិតភាគច្រើននៅក្នុងប្រទេសយើងចូលចិត្តរៀនគណិតវិទ្យាគណនាជាងខាងទ្រឹស្តី ហេតុនេះ ខ្ញុំនឹងលើកយកប្រធានបទមួយស្តីអំពី << **សិក្សាប្រភេទអាំងតេក្រាលមួយចំនួនក្នុងវិស័យគណិតវិទ្យានិងវិទ្យាសាស្ត្រ** >> ។ តើមានប្រភេទអាំងតេក្រាលអ្វីខ្លះដែលអាចគណនាបាន? តើគេអាចដោះស្រាយប្រភេទអាំងតេក្រាលទាំងនេះតាមវិធីសាស្ត្រណា? ដើម្បីឆ្លើយតបនឹងសំណួរទាំងពីរនេះ ខ្ញុំនឹងបង្ហាញនៅក្នុងជំពូកទី២ ទីបីនិងបន្តបន្ទាប់។ ជាដំបូង យើងនឹងសិក្សាទ្រឹស្តីដែលទាក់ទងនឹងប្រធានបទរបស់យើងក្នុងជំពូកទី១មុនសិនស្តីអំពីទ្រឹស្តីទាក់ទង។

ជំពូកទី១

ទ្រឹស្តីទាក់ទង

(Related Theories)

នៅក្នុងជំពូកទី១នេះ យើងនឹងសិក្សានូវនិយមន័យនៃព្រីមីទីវនិងអាំងតេក្រាល ហើយបន្ទាប់មក យើងនឹងសិក្សារូបមន្ត លក្ខណៈ និងវិធីខ្លះៗនៃការគណនាអាំងតេក្រាលដូចតទៅ៖

១.១ ព្រីមីទីវ

១.១.១ និយមន័យ

អនុគមន៍ $H(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $h(x)$ កាលណា $H'(x) = h(x)$ ចំពោះគ្រប់តម្លៃ x ក្នុងដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $h(x)$ ។^១

ឧទាហរណ៍ទី១ គេមានអនុគមន៍ $G(x) = 2x^3 - 8e^x$ និង $H(x) = 2x^3 - 8e^x + 2016$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ។ តើ $G(x)$ និង $H(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $g(x) = 6x^2 - 8e^x$ ឬទេ? ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $G(x) = 2x^3 - 8e^x$ និង $H(x) = 2x^3 - 8e^x + 2016$ នាំឱ្យ

$$G'(x) = 6x^2 - 8e^x = g(x) \text{ និង } H'(x) = 6x^2 - 8e^x = g(x) \text{ ។}$$

ដូចនេះ $G(x)$ និង $H(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $g(x)$ ។

ឧទាហរណ៍ទី២ គេមាន $F(x) = x^5(3e^x + 2)$ និង $f(x) = x^4(15e^x + 10 + 3xe^x)$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ។ បង្ហាញថា $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ ។ ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $F(x) = x^5(3e^x + 2)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ នាំឱ្យ

$$\begin{aligned} F'(x) &= (x^5)'(3e^x + 2) + x^5(3e^x + 2)' \\ &= 5x^4(3e^x + 2) + x^5(3e^x) \\ &= 15x^4e^x + 10x^4 + 3x^5e^x = x^4(15e^x + 10 + 3xe^x) = f(x) \end{aligned}$$

^១ យើង អាយុវឌ្ឍនៈវិជ្ជា “ អាំងតេក្រាលមិនកំណត់ ” ទំព័រទី៩ ឆ្នាំ១៩៩៧

$$= x^4 (15e^x + 10 + 3xe^x) = f(x) \text{ ។}$$

ដោយ $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ ដូចនេះ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៣ គេមាន $G(x) = xe^{-3x^2}$ និង $g(x) = (1-6x^2)e^{-3x^2}$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ។
បង្ហាញថា $G(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $g(x)$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $G(x) = xe^{-3x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \text{នាំឱ្យ } G'(x) &= (x)'e^{-3x^2} + x(e^{-3x^2})' \\ &= (1)e^{-3x^2} + x(-3x^2)'e^{-3x^2} \\ &= e^{-3x^2} + x(-6x)e^{-3x^2} \\ &= (1-6x^2)e^{-3x^2} = g(x) \text{ ។} \end{aligned}$$

ដោយ $G'(x) = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ ដូចនេះ $G(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $g(x)$ ។

១.១.២ ទ្រឹស្តីបទ

គេឱ្យ $H(x)$ ជាព្រីមីទីវមួយនៃអនុគមន៍ $h(x)$ នោះព្រីមីទីវទាំងអស់នៃ $h(x)$

មានទម្រង់ទូទៅ $H(x) + c$ ដែល c ជាចំនួនពិតបើរ។

សម្រាយបញ្ជាក់

យើងមាន $(H(x) + c)' = H'(x) = h(x)$ ពីព្រោះ c ជាចំនួនពិតបើរ និង $H(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $h(x)$ នាំឱ្យព្រីមីទីវទាំងអស់នៃ $h(x)$ មានទម្រង់ទូទៅ $H(x) + c$ (ពិត)។

១.២ អាំងតេក្រាលមិនកំណត់

១.២.១ និយមន័យ

គេមាន $h(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $h(x)$ ។ អាំងតេក្រាលមិនកំណត់នៃ $h(x)$ កំណត់ដោយ $\int h(x) dx = H(x) + c$ ដែល c ជាចំនួនពិតបើរ។

១.២.២ រូបមន្តគ្រឹះនៃអាំងតេក្រាលមិនកំណត់

យើងមានរូបមន្តគ្រឹះនៃអាំងតេក្រាលមិនកំណត់សំខាន់ពីរគឺ៖^២

^២ យើម អាយុវឌ្ឍនៈវិជ្ជា “ អាំងតេក្រាលមិនកំណត់ ” ទំព័រទី១០ ឆ្នាំ១៩៩៧

$$១. \int [g(x) \pm h(x)] dx = \int g(x) dx \pm \int h(x) dx$$

$$២. \int \alpha g(x) dx = \alpha \int g(x) dx ; \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ ។}$$

ឧទាហរណ៍ទី៤ គណនាអាំងតេក្រាល៖ $\int \lambda dx, \int x^\lambda dx, \int e^x dx, \int b^x dx,$
 $\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$ និង $\int \frac{dx}{x^2 + a^2}$ ដែល $\lambda \in \mathbb{R}, b > 0, b \neq 1, a \neq 0$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន៖

$$. (\lambda x + c)' = \lambda \text{ នាំឱ្យ } \int \lambda dx = \lambda x + c \text{ ។}$$

$$. \left(\frac{1}{\lambda + 1} x^{\lambda + 1} + c \right)' = \frac{\lambda + 1}{\lambda + 1} x^{(\lambda + 1) - 1} = x^\lambda, \lambda \neq -1$$

$$\text{និង } (\ln|x| + c)' = \frac{1}{x} = x^{-1}, \lambda = -1, x \neq 0$$

$$\text{នាំឱ្យ } \int x^\lambda dx = \frac{1}{\lambda + 1} x^{\lambda + 1} + c, \lambda \neq -1$$

$$\text{និងចំពោះ } \lambda = -1, \int x^{-1} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c \text{ ។}$$

$$. (e^x + c)' = e^x \text{ នាំឱ្យ } \int e^x dx = e^x + c \text{ ។}$$

$$. \left(\frac{b^x}{\ln b} + c \right)' = \frac{b^x \ln b}{\ln b} = b^x \text{ នាំឱ្យ } \int b^x dx = \frac{b^x}{\ln b} + c \text{ ។}$$

$$\begin{aligned} . \left(\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c \right)' &= \left(\frac{1}{2a} \ln|x-a| - \frac{1}{2a} \ln|x+a| + c \right)' \\ &= \frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{x-a} - \frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{x+a} = \frac{x+a - x-a}{2a(x-a)(x+a)} \\ &= \frac{2a}{2a(x^2 - a^2)} = \frac{1}{x^2 - a^2} \end{aligned}$$

$$\text{នាំឱ្យ } \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c \text{ ។}$$

$$\left(\frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + c \right)' = \frac{\left(\frac{x}{a} \right)'}{a \left(1 + \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right)} = \frac{1}{a^2 \left(1 + \frac{x^2}{a^2} \right)} = \frac{1}{x^2 + a^2}$$

នាំឱ្យ $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + c$ ។

១.២.៣ រូបមន្តងាយនៃអាំងតេក្រាលមិនកំណត់

ពីឧទាហរណ៍ទី៤ យើងបានរូបមន្តងាយៗមួយចំនួននៃអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដូចតទៅ៖

$$១. \int \lambda \, dx = \lambda x + c \quad (1.1)$$

$$២. \int x^\lambda \, dx = \frac{1}{\lambda + 1} x^{\lambda + 1} + c, \lambda \neq -1 \quad (1.2)$$

$$៣. \int x^{-1} \, dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c \quad (1.3)$$

$$៤. \int e^x \, dx = e^x + c \quad (1.4)$$

$$៥. \int b^x \, dx = \frac{b^x}{\ln b} + c, b > 0, b \neq 1 \quad (1.5)$$

$$៦. \int \frac{dx}{x^2 - b^2} = \frac{1}{2b} \ln \left| \frac{x-b}{x+b} \right| + c \quad (1.6)$$

$$៧. \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + c = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + c, a \neq 0 \quad (1.7)$$

យើងក៏អាចកំណត់បាននូវរូបមន្តដទៃទៀតដូចជា៖^៣

$$៨. \int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2} \, dx = -\frac{1}{x} + c \quad (1.8)$$

$$៩. \int \sin x \, dx = -\cos x + c \quad (1.9)$$

^៣ យឹម អាយុវឌ្ឍនៈវិជ្ជា “ អាំងតេក្រាលមិនកំណត់ ” ទំព័រទី១១ ឆ្នាំ១៩៩៧

$$១០. \int \cos x \, dx = \sin x + c \quad (1.10)$$

$$១១. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c \quad (1.11)$$

$$១២. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + c \quad (1.12)$$

ឧទាហរណ៍ទី៥ គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់

$$\int (-7x^7 - 4x^4 + 2x^2 - 9) \, dx, \int \frac{3x^2 + 2x + 5}{x} \, dx \text{ និង } \int (7e^x - 8 \cdot 5^x + 2x^3) \, dx \quad \text{។}$$

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្តក្នុងផ្នែក១.២.៣ យើងបាន៖

$$\begin{aligned} \int (-7x^7 - 4x^4 + 2x^2 - 9) \, dx &= -7 \int x^7 \, dx - 4 \int x^4 \, dx + 2 \int x^2 \, dx - \int 9 \, dx \\ &= -7 \cdot \frac{x^{7+1}}{7+1} - 4 \cdot \frac{x^{4+1}}{4+1} + 2 \cdot \frac{x^{2+1}}{2+1} - 9x + c \\ &= -\frac{7x^8}{8} - \frac{4x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} - 9x + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2 + 2x + 5}{x} \, dx &= \int \left(\frac{3x^2}{x} + \frac{2x}{x} + \frac{5}{x} \right) \, dx = \int \left(3x + 2 + \frac{5}{x} \right) \, dx \\ &= 3 \int x \, dx + 2 \int dx + 5 \int \frac{dx}{x} = \frac{3x^2}{2} + 2x + 5 \ln|x| + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{និង } \int (7e^x - 8 \cdot 5^x + 2x^3) \, dx &= 7 \int e^x \, dx - 8 \int 5^x \, dx + 2 \int x^3 \, dx \\ &= 7e^x - 8 \cdot \frac{5^x}{\ln 5} + 2 \cdot \frac{x^4}{4} + c \\ &= 7e^x - \frac{8}{\ln 5} 5^x + \frac{x^4}{2} + c \quad \text{។} \end{aligned}$$

ឧទាហរណ៍ទី៦ គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ $\int \frac{dy}{y^2 - 25}$ និង $\int \frac{dy}{y^2 + 2018}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្តអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ក្នុងផ្នែក១.២.៣ យើងបាន៖

$$\int \frac{dy}{y^2 - 25} = \int \frac{dy}{y^2 - 5^2} = \frac{1}{2(5)} \ln \left| \frac{y-5}{y+5} \right| + c = \frac{1}{10} \ln \left| \frac{y-5}{y+5} \right| + c$$

$$\text{និង } \int \frac{dy}{y^2 + 2018} = \int \frac{dy}{y^2 + (\sqrt{2018})^2} = \frac{1}{\sqrt{2018}} \tan^{-1} \left(\frac{y}{\sqrt{2018}} \right) + c \quad \text{។}$$

១.៣ អាំងតេក្រាលកំណត់

១.៣.១ និយមន័យ

គេឱ្យអនុគមន៍ $y = g(x)$ កំណត់លើចន្លោះ $[a, b]$ ។ ចែកចន្លោះ $[a, b]$ ជា n ចន្លោះដោយចំណុច $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$ ។ នៅលើចន្លោះនីមួយៗ $[x_{i-1}, x_i]$ គេជ្រើសរើសយកចំណុច ξ_i ហើយគេរកប្រវែងនៃចន្លោះនោះ $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ។ នាំឱ្យផលបូកអាំងតេក្រាលនៃ $g(x)$ លើចន្លោះ $[a, b]$ ជាផលបូកមានរាង៖

$$S_n = g(\xi_1)\Delta x_1 + g(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + g(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta x_i \quad \text{។}$$

អាំងតេក្រាលកំណត់នៃអនុគមន៍ $y = g(x)$ លើចន្លោះ $[a, b]$ ជាលីមីតនៃផលបូកអាំងតេក្រាលដោយមានលក្ខខណ្ឌប្រវែងដែលធំបំផុតក្នុងចន្លោះខិតទៅរកសូន្យ គឺថា

$$\int_a^b g(x) dx = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta x_i$$

ដែល $d = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$ ។

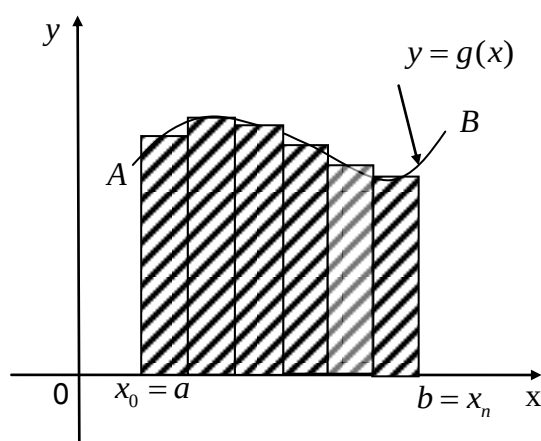
បើ S_n មានលីមីតកំណត់ S មិនទាក់ទងនឹងការចែកអង្កត់និងការជ្រើសរើសចំណុច ξ_i នោះគេថា S ជាអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍ $g(x)$ លើចន្លោះ $[a, b]$ ហើយគេសរសេរជា

$$\int_a^b g(x) dx = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S \quad (1.13) \quad \text{។}^{\text{៤}}$$

គេថា $g(x)$ មានអាំងតេក្រាលលើចន្លោះ $[a, b]$ ។ អាំងតេក្រាល $\int_a^b g(x) dx$ ទាក់ទងតែអនុគមន៍ $g(x)$ និងគោល a, b ហើយមិនទាក់ទងនឹងអថេរអាំងតេក្រាលទេគឺ

$$\int_a^b g(x) dx = \int_a^b g(t) dt \quad \text{។}$$

^៤ យើង អាយុវឌ្ឍនៈវិជ្ជា “ អាំងតេក្រាលកំណត់ ” ទំព័រទី១ ឆ្នាំ១៩៩៧



យើងនឹងគណនាអាំងតេក្រាលកំណត់តាមនិយមន័យដែលបានបង្ហាញនូវឧទាហរណ៍ទី៧ ទី៨ និងទី៩ដូចតទៅ៖

ឧទាហរណ៍ទី៧ គណនា $\int_3^6 25 dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

អនុគមន៍ $g(x) = 25$ ជាប់លើ $[3, 6]$ នាំឱ្យវាមានអាំងតេក្រាលលើចន្លោះនោះ។ ចែកចន្លោះ

$[3, 6]$ ជា n ចន្លោះស្មើៗគ្នាដោយចំណុច $x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n} = 3 + i \cdot \frac{6-3}{n} = 3 + i \cdot \frac{3}{n}$ និង

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n} = \frac{3}{n}$ ហើយជ្រើសរើសចំណុច ξ_i លើចន្លោះ $[x_{i-1}, x_i]$ ដែល

$\xi_i = x_i$ នាំឱ្យ $g(\xi_i) = 25$ យើងបាន៖

$$S_n = \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \Delta x_i = 25 \sum_{i=1}^n \Delta x_i = 25 \sum_{i=1}^n \frac{3}{n} = 25 \cdot \frac{3}{n} \cdot n = 75$$

និង $\int_3^6 25 dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 75$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៨ គណនា $\int_0^1 -5x^2 dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

អនុគមន៍ $g(x) = -5x^2$ ជាប់លើ $[0, 1]$ នាំឱ្យវាមានអាំងតេក្រាលលើ $[0, 1]$ ។

នាំឱ្យ $\int_0^1 -5x^2 dx = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \Delta x_i$ ដែល $d = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$ ។ ក្នុងនោះលីមីតមានដោយ

មិនទាក់ទងនឹងការចែកចន្លោះ $[0, 1]$ និងការជ្រើសរើសចំណុច ξ_i ទេ។ គេចែកចន្លោះ

$[0, 1]$ ជា n ចន្លោះតូចៗស្មើគ្នានិងជ្រើសរើស $\xi_i = x_i$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ។ គេបាន៖

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n}; \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}; \quad \xi_i = x_i = \frac{i}{n} \Rightarrow g(\xi_i) = -5\xi_i^2 = \frac{-5i^2}{n^2} \quad \text{និង}$$

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \frac{-5i^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} = -\frac{5}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 \\ &= -\frac{5}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = -\frac{5(n+1)(2n+1)}{6n^2} = -\frac{5}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) \quad \text{។} \end{aligned}$$

ដោយចែកជាចន្លោះស្មើៗគ្នា នាំឱ្យ $\Delta x_i \rightarrow 0$ នោះ $n \rightarrow +\infty$ និង

$$\begin{aligned} \int_0^1 -5x^2 dx &= \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = -\frac{5}{6} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) \\ &= -\frac{5}{6} (1+0)(2+0) = -\frac{5}{3} \quad \text{។} \end{aligned}$$

ឧទាហរណ៍ទី៩ គណនា $\int_a^b e^x dx \quad (0 < a < b)$ ។

ដំណោះស្រាយ

អនុគមន៍ $g(x) = e^x$ ជាប់លើ $[a, b]$ នាំឱ្យមានអាំងតេក្រាលលើ $[a, b]$ ។

នាំឱ្យ $\int_a^b e^x dx = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \Delta x_i$ ដែល $d = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$ ។ ក្នុងនោះលីមីតមានដោយ

មិនទាក់ទង នឹងការចែកចន្លោះ $[a, b]$ និងការជ្រើសរើសចំណុច ξ_i ទេ។ គេចែកចន្លោះ

$[a, b]$ ជា n ចន្លោះតូចៗស្មើគ្នានិងជ្រើសរើស $\xi_i = x_i, i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ។

គេបាន៖ $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}; \quad i \in \{1, 2, \dots, n\};$

$$\xi_i = x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n} \Rightarrow g(\xi_i) = e^{\xi_i} = e^{a+i \cdot \frac{b-a}{n}}$$

$$\text{និង} \quad S_n = \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^n e^{a+i \cdot \frac{b-a}{n}} \cdot \frac{b-a}{n}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(b-a)e^a}{n} \sum_{i=1}^n e^{i \cdot \frac{b-a}{n}} = \frac{(b-a)e^a}{n} \cdot e^{\frac{b-a}{n}} \cdot \frac{1 - \left(e^{\frac{b-a}{n}}\right)^n}{1 - e^{\frac{b-a}{n}}} \\ &= \frac{(b-a)e^a}{n} \cdot e^{\frac{b-a}{n}} \cdot \frac{1 - e^{b-a}}{1 - e^{\frac{b-a}{n}}} \end{aligned}$$

$$= \frac{(b-a)(e^a - e^b)}{n} \cdot \frac{e^{\frac{b-a}{n}}}{1 - e^{-\frac{b-a}{n}}} = (e^b - e^a) e^{\frac{b-a}{n}} \cdot \frac{\left(\frac{b-a}{n}\right)}{e^{\frac{b-a}{n}} - 1} \quad \text{។}$$

ដោយចែកជាចន្លោះស្មើៗគ្នា នាំឱ្យ $\Delta x_i \rightarrow 0$ នោះ $n \rightarrow +\infty$ និង

$$\int_a^b e^x dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = (e^b - e^a) \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{b-a}{n}} \cdot \frac{\left(\frac{b-a}{n}\right)}{e^{\frac{b-a}{n}} - 1} = e^b - e^a$$

ពីព្រោះ $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{b-a}{n}} = e^0 = 1$ និងតាង $x = \frac{b-a}{n}$ នាំឱ្យ

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{b-a}{n}\right)}{e^{\frac{b-a}{n}} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{e^x - 1}{x}} = \frac{1}{1} = 1 \quad \text{។}$$

ដូចនេះ យើងបាន $\int_a^b e^x dx = e^b - e^a$ ។

១.៣.២ រូបមន្តគ្រឹះនៃអាំងតេក្រាលកំណត់^៥

គេឱ្យ $f(x)$ និង $g(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $[a, b]$ នោះគេបាន៖

$$១. \int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx \quad (1.14)$$

$$២. \int_a^b \lambda g(x) dx = \lambda \int_a^b g(x) dx ; \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (1.15)$$

$$៣. \int_a^b g(x) dx = \int_a^c g(x) dx + \int_c^b g(x) dx ; \quad a < c < b \quad (1.16)$$

$$៤. \int_a^a g(x) dx = 0 \quad (1.17)$$

$$៥. \int_a^b g(x) dx = - \int_b^a g(x) dx \quad (1.18)$$

$$៦. \text{ បើ } g(x) \geq 0 \text{ លើ } [a, b] \text{ នោះគេបាន } \int_a^b g(x) dx \geq 0 \quad (1.19)$$

^៥ យើង អាយុវឌ្ឍនៈវិជ្ជា “ អាំងតេក្រាលកំណត់ ” ទំព័រទី២និងទី៣ ឆ្នាំ១៩៩៧

វិបាក

៧. ចំពោះ $\forall x \in [a, b]; g(x) \leq f(x)$ នាំឱ្យ $\int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx$ (1.20)

$$៨. \left| \int_a^b g(x) dx \right| \leq \int_a^b |g(x)| dx \quad (1.21)$$

ឧទាហរណ៍ទី១០ ចូរប្រៀបធៀបអាំងតេក្រាល $\int_0^1 x^2 \sin^2 x dx$ និង $\int_0^1 x \sin^2 x dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

ចំពោះ $\forall x \in [0, 1]$ យើងបាន $0 \leq x^2 \leq x \leq 1$ និង $\sin^2 x = (\sin x)^2 \geq 0$

នាំឱ្យ $x^2 \sin^2 x \leq x \sin^2 x$ ចំពោះ $\forall x \in [0, 1]$ ។

នោះតាមរូបមន្ត (1.20) ដូច្នេះ $\int_0^1 x^2 \sin^2 x dx \leq \int_0^1 x \sin^2 x dx$ ។

ឧទាហរណ៍ទី១១ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $0 < \int_1^{\sqrt{3}} \frac{e^{-x} \sin x}{x^2} dx < \frac{1}{e}$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $0 < 1 \leq x \leq \sqrt{3} < \pi$

នាំឱ្យ $x^2 > 0, 0 < \sin x < 1$ និង $e = e^1 \leq e^x$ ។

នាំឱ្យ $\frac{1}{x^2} > 0, e^{-x} = \frac{1}{e^x} \leq \frac{1}{e}$ និង $0 < \frac{e^{-x} \sin x}{x^2} \leq \frac{1}{ex^2}$ ចំពោះគ្រប់ $x \in [1, \sqrt{3}]$ ។

នោះតាមរូបមន្ត (1.20) នាំឱ្យ

$$0 < \int_1^{\sqrt{3}} \frac{e^{-x} \sin x}{x^2} dx \leq \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{ex^2} dx = \frac{1}{e} \int_1^{\sqrt{3}} x^{-2} dx$$

$$\text{សមមូល } 0 < \int_1^{\sqrt{3}} \frac{e^{-x} \sin x}{x^2} dx \leq \frac{1}{e} \cdot \frac{x^{-1}}{(-1)} \Big|_1^{\sqrt{3}}$$

$$\text{នាំឱ្យ } 0 < \int_1^{\sqrt{3}} \frac{e^{-x} \sin x}{x^2} dx \leq \frac{-1}{e} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - 1 \right) = \frac{1}{e} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) < \frac{1}{e} \quad (\text{ពិត}) ។$$

ដូចនេះ យើងបាន $0 < \int_1^{\sqrt{3}} \frac{e^{-x} \sin x}{x^2} dx < \frac{1}{e}$ ។

១.៣.៣ ទ្រឹស្តីបទ Newton – Leibnitz

ទ្រឹស្តីបទ បើ $g(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $[a, b]$ និង $G(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $g(x)$ លើ $[a, b]$ នោះគេបាន

$$\int_a^b g(x) dx = G(x) \Big|_a^b = G(b) - G(a) \quad (1.22) \quad \text{។}$$

សម្រាយបញ្ជាក់

ដោយ $g(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $[a, b]$ នាំឱ្យមានអាំងតេក្រាលលើ $[a, b]$ ។

បើគេមានព្រីមីទីវ $G(x)$ នៃ $g(x)$ លើ $[a, b]$ នាំឱ្យ

$$G'(x) = \frac{d}{dx} \left[\int_a^x g(t) dt \right] = g(x) \quad \text{ចំពោះគ្រប់ } x \in [a, b]$$

នាំឱ្យ $\int_a^x g(t) dt = G(x) + c$ (c ជាចំនួនពិតថេរ) ។

បើគេឱ្យ $x = a$ នាំឱ្យ $\int_a^a g(t) dt = G(a) + c$

សមមូល $0 = G(a) + c$ សមមូល $c = -G(a)$; $\forall x \in [a, b]$

នាំឱ្យ $\int_a^x g(t) dt = G(x) - G(a)$ ។

បើគេឱ្យ $x = b$ នោះគេបាន $\int_a^b g(x) dx = G(b) - G(a)$ ពិត ។

ឧទាហរណ៍ទី១២ គណនាអាំងតេក្រាលកំណត់៖ $\int_3^5 4x^4 dx$ និង $\int_0^{\pi/4} \sin t dt$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $G(x) = \frac{4}{5}x^5 + c$ ជាព្រីមីទីវនៃ $g(x) = 4x^4$ លើ $[3, 5]$ នាំឱ្យ

$$\begin{aligned} \int_3^5 4x^4 dx &= \left(\frac{4}{5}x^5 + c \right) \Big|_3^5 = \left(\frac{4}{5} \cdot 5^5 + c \right) - \left(\frac{4}{5} \cdot 3^5 + c \right) \\ &= \frac{11528}{5} = 2305.6 \quad \text{។} \end{aligned}$$

ម្យ៉ាងទៀត យើងមាន $H(t) = -\cos t + c$ ជាព្រីមីទីវនៃ $h(t) = \sin t$ លើ $[0, \pi/4]$ នាំឱ្យ

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4} \sin t \, dt &= (-\cos t + c) \Big|_0^{\pi/4} = \left(-\cos \frac{\pi}{4} + c \right) - (-\cos 0 + c) \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \approx 0.2928 \text{ ។}\end{aligned}$$

ឧទាហរណ៍ទី១៣ តាមរូបមន្តក្នុងផ្នែក១.២.៣ យើងអាចគណនាអាំងតេក្រាលកំណត់មួយចំនួនដូចតទៅ៖

$$\begin{aligned}១. \int_a^b \lambda \, dx &= \lambda x \Big|_a^b = \lambda(b - a) \\ ២. \int_a^b x^n \, dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_a^b = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}, \quad n \neq -1 \\ ៣. \int_1^a \frac{dx}{x} &= \ln|x| \Big|_1^a = \ln|a| - \ln|1| = \ln|a| \\ ៤. \int_0^a e^y \, dy &= e^y \Big|_0^a = e^a - e^0 = e^a - 1 \\ ៥. \int_a^x 8^y \, dy &= \frac{8^y}{\ln 8} \Big|_a^x = \frac{8^x}{\ln 8} - \frac{8^a}{\ln 8} = \frac{8^x - 8^a}{\ln 8} \text{ ។}\end{aligned}$$

ឧទាហរណ៍ទី១៤ គណនា $\int_0^a (-8e^t + 6\cos t) \, dt$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $G(t) = -8e^t + 6\sin t$ ជាត្រីមីទីវមួយនៃ $g(t) = -8e^t + 6\cos t$ លើ $[0, a]$ ។

$$\begin{aligned}\text{នាំឱ្យ } \int_0^a (-8e^t + 6\cos t) \, dt &= (-8e^t + 6\sin t) \Big|_0^a \\ &= (-8e^a + 6\sin a) - (-8e^0 + 6\sin 0) \\ &= -8e^a + 6\sin a + 8\end{aligned}$$

ឬម្យ៉ាងទៀត យើងក៏អាចគណនាវាតាមរូបមន្តអាំងតេក្រាលគឺ

$$\begin{aligned}\int_0^a (-8e^t + 6\cos t) \, dt &= -8 \int_0^a e^t \, dt + 6 \int_0^a \cos t \, dt \\ &= -8e^a + 6\sin a + 8 \text{ ។}\end{aligned}$$

ឧទាហរណ៍ទី១៥ គណនា $\int_2^3 \frac{(3t-4)^2}{t} dt$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្តអាំងតេក្រាល យើងបាន៖

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{(3t-4)^2}{t} dt &= \int_2^3 \frac{(3t)^2 - 2(3t)(4) + 4^2}{t} dt \\ &= \int_2^3 \frac{9t^2 - 24t + 16}{t} dt = \int_2^3 \left(9t - 24 + \frac{16}{t} \right) dt \\ &= \left(9 \cdot \frac{t^2}{2} - 24t + 16 \ln|t| \right) \Big|_2^3 \\ &= \left(9 \cdot \frac{3^2}{2} - 24 \cdot 3 + 16 \ln|3| \right) - \left(9 \cdot \frac{2^2}{2} - 24 \cdot 2 + 16 \ln|2| \right) \end{aligned}$$

ឧទាហរណ៍ទី១៦ គណនា $\int_{-4}^4 |3x+7| dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

ពីនិយមន័យនៃតម្លៃដាច់ខាត យើងអាចសរសេរ

$$|3x+7| = \begin{cases} -(3x+7), & x < -\frac{7}{3} \\ 3x+7, & x \geq -\frac{7}{3} \end{cases}$$

និងប្រើរូបមន្តអាំងតេក្រាលកំណត់ យើងបាន៖

$$\begin{aligned} \int_{-4}^4 |3x+7| dx &= -\int_{-4}^{-7/3} (3x+7) dx + \int_{-7/3}^4 (3x+7) dx \\ &= -\left(\frac{3}{2}x^2 + 7x \right) \Big|_{-4}^{-7/3} + \left(\frac{3}{2}x^2 + 7x \right) \Big|_{-7/3}^4 \\ &= -\left(\frac{3}{2} \left(\frac{-7}{3} \right)^2 + 7 \left(\frac{-7}{3} \right) \right) + \left(\frac{3}{2} (-4)^2 + 7(-4) \right) \\ &\quad + \left(\frac{3}{2} (4)^2 + 7(4) \right) - \left(\frac{3}{2} \left(\frac{-7}{3} \right)^2 + 7 \left(\frac{-7}{3} \right) \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{49}{3} + 48 = \frac{193}{3} = 64.3333 \text{ ។}$$

ឧទាហរណ៍ទី១៧ គណនា $\int_{-2}^5 t|t-1| dt$ និង $\int_{-2}^5 t^3|t-1| dt$ ។

ដំណោះស្រាយ

ពីនិយមន័យនៃតម្លៃដាច់ខាត យើងមាន

$$|t-1| = \begin{cases} -(t-1), & t < 1 \\ t-1, & t \geq 1 \end{cases}$$

និងប្រើរូបមន្តអាំងតេក្រាលកំណត់ យើងបាន៖

$$\begin{aligned} \int_{-2}^5 t|t-1| dt &= \int_{-2}^1 t[-(t-1)] dt + \int_1^5 t(t-1) dt \\ &= -\int_{-2}^1 (t^2 - t) dt + \int_1^5 (t^2 - t) dt \\ &= -\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}\right) \Big|_{-2}^1 + \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}\right) \Big|_1^5 \\ &= -\left(\frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2}\right) + \left(\frac{(-2)^3}{3} - \frac{(-2)^2}{2}\right) + \left(\frac{5^3}{3} - \frac{5^2}{2}\right) - \left(\frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2}\right) \\ &= \frac{149}{6} \approx 24.8333 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{និង } \int_{-2}^5 t^3|t-1| dt &= \int_{-2}^1 t^3[-(t-1)] dt + \int_1^5 t^3(t-1) dt \\ &= -\int_{-2}^1 (t^4 - t^3) dt + \int_1^5 (t^4 - t^3) dt \\ &= -\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^4}{4}\right) \Big|_{-2}^1 + \left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^4}{4}\right) \Big|_1^5 \\ &= -\left(\frac{1^5}{5} - \frac{1^4}{4}\right) + \left(\frac{(-2)^5}{5} - \frac{(-2)^4}{4}\right) + \left(\frac{5^5}{5} - \frac{5^4}{4}\right) - \left(\frac{1^5}{5} - \frac{1^4}{4}\right) \\ &= \frac{9169}{20} = 458.45 \text{ ។} \end{aligned}$$

១.៤ វិធីប្តូរអថេរ

ឧបមាថា គេមានអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ $J = \int f[h(x)] h'(x) dx$ ។

តាង $v = h(x)$ នោះ $dv = h'(x)dx$ ។ យើងបាន៖

$$J = \int f[h(x)] h'(x) dx = \int f(v) dv = F(v) + c_1 = F(h(x)) + c_1 \quad (1.23)$$

ដែល $F(v)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(v)$ និង c_1 ជាចំនួនពិតថេរ។ ស្រដៀងគ្នាដែរ យើងក៏មានទ្រឹស្តីនៅក្នុងអាំងតេក្រាលកំណត់ដូចខាងក្រោម។

គេមានអនុគមន៍ $f(x)$ ជាប់លើចន្លោះ $[a, b]$ ។ បើអនុគមន៍ $x = h(t)$ មានដេរីវេ $h'(t)$ ជាប់លើចន្លោះ $[\alpha, \beta]$ ដែល $h([\alpha, \beta]) \subseteq [a, b]$ ហើយ $h(\alpha) = a$ និង $h(\beta) = b$ នោះអាំងតេក្រាល

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[h(t)] h'(t) dt \quad (1.24) \quad (\text{រូបមន្តប្តូរអថេរ})^{\text{៦}}$$

សម្រាយបញ្ជាក់

គេដឹងថា $F[h(t)]$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f[h(t)] h'(t)$ ។ តាមរូបមន្ត Newton-Leibnitz គេបាន

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} f[h(t)] h'(t) dt &= F[h(t)] \Big|_{\alpha}^{\beta} = F[h(\beta)] - F[h(\alpha)] \\ &= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx \quad (\text{ពិត}) \quad \text{។} \end{aligned}$$

ឧទាហរណ៍ទី១៨ គណនាអាំងតេក្រាល $\int e^{\alpha x} dx$ និង $\int a^{\alpha x} dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងអាចគណនាអាំងតេក្រាល $\int e^{\alpha x} dx$ តាមពីរករណីនៃ α គឺ $\alpha = 0$ និង $\alpha \neq 0$ ។

- ករណី $\alpha = 0$ នាំឱ្យ

$$\int e^{\alpha x} dx = \int e^{0 \cdot x} dx = \int dx = x + c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- ករណី $\alpha \neq 0$ យើងប្រើវិធីប្តូរអថេរ គឺតាង $u = \alpha x$ នាំឱ្យ $du = \alpha dx \Leftrightarrow dx = \frac{du}{\alpha}$ ។

នាំឱ្យ

$$\int e^{\alpha x} dx = \int e^u \frac{du}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \int e^u du = \frac{1}{\alpha} e^u + c = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} + c \quad (1.25)$$

^៦ យើង អាយុវឌ្ឍនៈវិជ្ជា “ អាំងតេក្រាលកំណត់ ” ទំព័រទី៤១និងទី៤២ ឆ្នាំ១៩៩៧

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

យើងទាញបាន

$$\int a^{\alpha x} dx = \int \left(e^{\ln a}\right)^{\alpha x} dx = \int e^{(\alpha \ln a)x} dx = \frac{e^{(\alpha \ln a)x}}{(\alpha \ln a)} + c = \frac{a^{\alpha x}}{\alpha \ln a} + c \quad (1.26)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ និង $a > 0, a \neq 1$ ។

ឧទាហរណ៍ទី១៩ គណនាអាំងតេក្រាល $\int \frac{q}{\alpha x + \beta} dx$ ($\alpha \neq 0$) និង $\int_0^1 \frac{e^x}{4e^x + 3} dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $v = \alpha x + \beta$ នោះ $dv = \alpha dx \Leftrightarrow dx = \frac{1}{\alpha} dv$ ។

យើងបាន

$$\begin{aligned} \int \frac{q}{\alpha x + \beta} dx &= \int \frac{q}{v} \cdot \frac{1}{\alpha} dv = \frac{q}{\alpha} \int \frac{dv}{v} \\ &= \frac{q}{\alpha} \ln|v| + c = \frac{q}{\alpha} \ln|\alpha x + \beta| + c \quad (1.27) \end{aligned}$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ

$$\begin{aligned} \text{និង} \quad \int_0^1 \frac{e^x}{4e^x + 3} dx &= \int_0^1 \frac{d(e^x)}{4e^x + 3} = \frac{1}{4} \ln|4e^x + 3| \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{4} (\ln(4e + 3) - \ln 7) \approx 0.1710 \quad \text{។} \end{aligned}$$

ឧទាហរណ៍ទី២០ គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int e^x \sqrt{(3e^x + 5)^9} dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $v = 3e^x + 5$ នោះ $dv = 3e^x dx \Leftrightarrow e^x dx = \frac{1}{3} dv$ ។

យើងបាន៖

$$I = \int e^x \sqrt{(3e^x + 5)^9} dx = \int \sqrt{v^9} \cdot \frac{1}{3} dv = \frac{1}{3} \int v^{\frac{9}{2}} dv$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{v^{\frac{9}{2}+1}}{(\frac{9}{2}+1)} + c = \frac{1}{3} \cdot \frac{v^{\frac{11}{2}}}{(11/2)} + c = \frac{2}{33} (3e^x + 5)^{\frac{11}{2}} + c \quad \text{។}$$

១.៥ វិធីអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក

បើ $u = u(x)$ និង $v = v(x)$ ជាអនុគមន៍មានឌីផេរ៉ង់ស្យែលលើចន្លោះ $[a, b]$ នោះ

គេបានអាំងតេក្រាល $\int_a^b u dv = uv|_a^b - \int_a^b v du$ (1.28) (រូបមន្តអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក)^៧ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

ដោយ $u = u(x)$ និង $v = v(x)$ ជាអនុគមន៍មានឌីផេរ៉ង់ស្យែលលើចន្លោះ $[a, b]$ នោះយើងបាន $d(uv) = u dv + v du$ ។

$$\text{នាំឱ្យ} \quad \int_a^b d(uv) = \int_a^b u dv + \int_a^b v du$$

$$\text{តែ} \quad \int_a^b d(uv) = uv|_a^b$$

$$\text{នាំឱ្យ} \quad \int_a^b u dv = uv|_a^b - \int_a^b v du \quad \text{ពិត ។}$$

$$\text{ឧទាហរណ៍ទី២១} \quad \text{គណនា } I = \int_0^2 x e^{2x} dx \quad \text{។}$$

ដំណោះស្រាយ

យើងយក $u = x$ នាំឱ្យ $du = dx$

$$\text{និង } dv = e^{2x} dx \quad \text{នាំឱ្យ } v = \int dv = \int e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2 \ln e} = \frac{e^{2x}}{2} \quad \text{។}$$

$$\text{នាំឱ្យ} \quad I = \int_0^2 x e^{2x} dx = \int_0^2 u dv = uv|_0^2 - \int_0^2 v du$$

$$= \frac{x e^{2x}}{2} \Big|_0^2 - \frac{1}{2} \int_0^2 e^{2x} dx = \frac{2e^4}{2} - 0 - \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{2x}}{2} \Big|_0^2$$

$$\text{ឧទាហរណ៍ទី២២} \quad \text{គណនា } J = \int \frac{x \ln x dx}{(x^2 + 1)^2} \quad \text{។}$$

^៧ យើង អាយុវឌ្ឍនៈវិជ្ជា “ អាំងតេក្រាលកំណត់ ” ទំព័រទី៤៣ ឆ្នាំ១៩៩៧

ជំនួយការស្រាយ

យើងយក $u = \ln x$ នាំឱ្យ $du = \frac{dx}{x}$

$$\begin{aligned} \text{និង } dv &= \frac{x dx}{(x^2 + 1)^2} \text{ នាំឱ្យ } v = \int dv = \int \frac{x dx}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1}{2} \int (x^2 + 1)^{-2} d(x^2 + 1) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2 + 1)^{-1}}{(-1)} = -\frac{1}{2(x^2 + 1)} \quad \text{។} \end{aligned}$$

$$\text{នាំឱ្យ } J = \int \frac{x \ln x dx}{(x^2 + 1)^2} = \int u dv = uv - \int v du$$

$$= -\frac{\ln x}{2(x^2 + 1)} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x(x^2 + 1)}$$

$$= -\frac{\ln x}{2(x^2 + 1)} + \frac{1}{2} \int \frac{(x^2 + 1) - x^2}{x(x^2 + 1)} dx$$

$$= -\frac{\ln x}{2(x^2 + 1)} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx - \frac{1}{2} \int \frac{x}{(x^2 + 1)} dx$$

$$= -\frac{\ln x}{2(x^2 + 1)} + \frac{1}{2} \ln|x| - \frac{1}{4} \int \frac{d(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)}$$

$$= -\frac{\ln x}{2(x^2 + 1)} + \frac{1}{2} \ln|x| - \frac{1}{4} \ln(x^2 + 1) + c \quad \text{។}$$

១.៦ អាំងតេក្រាល Improper^៨

ក្នុងផ្នែកនេះ យើងនឹងសិក្សាអំពីអាំងតេក្រាល Improper មានបីទម្រង់ដូចតទៅ។

និយមន័យ គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $[a, +\infty)$ ។ យើងកំណត់

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_a^N f(x) dx \quad (1.29) \quad \text{។}$$

ប្រសិនបើលីមីតនេះមាននិងរាប់អស់ នោះយើងនិយាយថាអាំងតេក្រាល $\int_a^{+\infty} f(x) dx$

^៨ <http://archives.math.utk.edu/visual.calculus/4/improper.2/>

ជាអាំងតេក្រាលរួម ហើយករណីផ្សេងទៀត យើងនិយាយថា វាជាអាំងតេក្រាលរីក។ គេថា

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ ជាអាំងតេក្រាល Improper ។}$$

ឧទាហរណ៍ទី២៣ គណនា $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ និង $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្តអាំងតេក្រាល Improper យើងបាន៖

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_1^N \frac{1}{x^2} dx = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_1^N x^{-2} dx \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \left. -\frac{1}{x} \right|_1^N = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{N} + 1 \right) = 1 \end{aligned}$$

មានន័យថា $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ រួមរក 1

$$\begin{aligned} \text{និង} \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \tan^{-1} x \Big|_0^t \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\tan^{-1} t - \tan^{-1} 0 \right) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

មានន័យថា $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ រួមរក $\frac{\pi}{2}$ ។

សម្គាល់ ក្នុងសៀវភៅខ្លះ គេសរសេរ

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x \Big|_0^{+\infty} = \tan^{-1}(+\infty) - \tan^{-1}(0) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

ដើម្បីងាយស្រួលក្នុងការសរសេរ និង គណនាអាំងតេក្រាលឱ្យបានហ័ស។

និយមន័យ គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $(-\infty, b]$ ។ យើងកំណត់

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{N \rightarrow -\infty} \int_N^b f(x)dx \quad (1.30) \text{ ។}$$

ប្រសិនបើលីមីតនេះមាននិងរាប់អស់ នោះយើងនិយាយថា អាំងតេក្រាល $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ ជាអាំងតេក្រាលរួម ហើយករណីផ្សេងទៀត យើងនិយាយថា វាជាអាំងតេក្រាលរីក។ គេថា $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ ជាអាំងតេក្រាល Improper ។

ឧទាហរណ៍ទី២៤ គណនា $\int_{-\infty}^2 \frac{1}{(x-5)^{4/3}} dx$ និង $\int_{-\infty}^0 e^{5x} dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្តអាំងតេក្រាល Improper យើងបាន៖

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^2 \frac{1}{(x-5)^{4/3}} dx &= \lim_{N \rightarrow -\infty} \int_N^2 \frac{1}{(x-5)^{4/3}} dx = \lim_{N \rightarrow -\infty} \int_N^2 (x-5)^{-4/3} dx \\ &= \lim_{N \rightarrow -\infty} \left. \frac{(x-5)^{-4/3+1}}{(-4/3+1)} \right|_N^2 = \lim_{N \rightarrow -\infty} \left(-\frac{3}{\sqrt[3]{-3}} + \frac{3}{\sqrt[3]{N-5}} \right) \\ &= \frac{3}{\sqrt[3]{3}} + 0 = \frac{3}{\sqrt[3]{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{និង} \quad \int_{-\infty}^0 e^{5x} dx &= \lim_{N \rightarrow -\infty} \int_N^0 e^{5x} dx = \lim_{N \rightarrow -\infty} \left. \frac{e^{5x}}{5} \right|_N^0 \\ &= \lim_{N \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{5} - \frac{e^{5N}}{5} \right) = \lim_{N \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{5e^{-5N}} \right) \\ &= \frac{1}{5} - 0 = \frac{1}{5} \quad \text{។} \end{aligned}$$

និយមន័យ គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $\mathbb{R}$ ។ ប្រសិនបើអាំងតេក្រាល

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^c f(x)dx \quad \text{និង} \quad \int_c^{+\infty} f(x)dx \quad \text{ទាំងពីររួម} \quad \text{ចំពោះចំនួនពិត } c \quad \text{មួយចំនួន} \quad \text{នោះយើងកំណត់} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx \quad (1.31) \end{aligned}$$

និងយើងនិយាយថា អាំងតេក្រាល $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ នេះរួម ហើយករណីផ្សេងទៀត យើងនិយាយ

ថា វាជាអាំងតេក្រាលរីក។ គេថា $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ ជាអាំងតេក្រាល Improper ។

ឧទាហរណ៍ទី២៥ គណនា $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 25} dx$ និង $\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-5x^2} dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្តអាំងតេក្រាល Improper យើងបាន៖

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 25} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2 + 25} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 25}$$

$$= \lim_{N \rightarrow -\infty} \int_N^0 \frac{dx}{x^2 + 25} + \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_0^M \frac{dx}{x^2 + 25}$$

$$= \lim_{N \rightarrow -\infty} \int_N^0 \frac{dx}{x^2 + 5^2} + \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_0^M \frac{dx}{x^2 + 5^2}$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \lim_{N \rightarrow -\infty} \tan^{-1} \frac{x}{5} \Big|_N^0 + \frac{1}{5} \cdot \lim_{M \rightarrow +\infty} \tan^{-1} \frac{x}{5} \Big|_0^M$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \lim_{N \rightarrow -\infty} \left(\tan^{-1} \frac{0}{5} - \tan^{-1} \frac{N}{5} \right) + \frac{1}{5} \cdot \lim_{M \rightarrow +\infty} \left(\tan^{-1} \frac{M}{5} - \tan^{-1} \frac{0}{5} \right)$$

$$= \frac{1}{5} \left[0 - \left(-\frac{\pi}{2} \right) + \frac{\pi}{2} - 0 \right] = \frac{\pi}{5}$$

និង $\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-5x^2} dx = \int_{-\infty}^0 x e^{-5x^2} dx + \int_0^{+\infty} x e^{-5x^2} dx$

$$= \lim_{N \rightarrow -\infty} \int_N^0 x e^{-5x^2} dx + \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_0^M x e^{-5x^2} dx$$

$$= -\frac{1}{10} \lim_{N \rightarrow -\infty} \int_N^0 e^{-5x^2} d(-5x^2) - \frac{1}{10} \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_0^M e^{-5x^2} d(-5x^2)$$

$$= -\frac{1}{10}(1-0) - \frac{1}{10}(0-1) = 0 \text{ ។}$$

ជាសរុប ជំពូកទី១បានបង្ហាញនូវនិយមន័យនៃព្រីមីទីវ និង អាំងតេក្រាល ទ្រឹស្តីបទ រូបមន្តគ្រឹះ ហើយលក្ខណៈជាច្រើននៃអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ និង អាំងតេក្រាលកំណត់។ ជាងនេះទៅទៀត ជំពូកទី១នេះបានផ្តល់នូវវិធីសាស្ត្រគណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ អាំងតេក្រាលកំណត់ និង អាំងតេក្រាល Improper តាមនិយមន័យ រូបមន្តងាយ វិធីប្តូរអថេរ និង វិធីអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកដោយអនុវត្តន៍លើឧទាហរណ៍មួយចំនួន។ បន្ទាប់មក យើងនឹងបង្ហាញនិងសិក្សាអំពីប្រភេទអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍សនិទាននៅក្នុងជំពូកទី២បន្តទៀត។

ជំពូកទី២

ប្រភេទអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍សនិទាន

(Types of Integrals of Rational Functions)

នៅក្នុងជំពូកទី២នេះ យើងនឹងសិក្សាអំពីការបំបែកប្រភាគសនិទានក្នុង $\mathbb{R}$ និងប្រភេទអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍សនិទានមួយចំនួនដូចតទៅ៖

២.១ ការបំបែកអនុគមន៍សនិទានក្នុង $\mathbb{R}$

គេឱ្យ $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ ជាអនុគមន៍សនិទានឬប្រភាគមួយដែលមានមេគុណជាចំនួន

ពិត ក្នុងនោះ $P(x)$ ជាពហុធាតុគតិក និង $Q(x)$ ជាពហុធាតុបែងដែលមានមេគុណជាចំនួនពិត ហើយ $Q(x) \neq 0$ ។

គេឧបមាថាប្រភាគ F ជាតំណាងដោយគូ (P, Q) នៃពហុធាតុបែងរវាងគ្នា។ គេថា F ជាប្រភាគមិនអាចបង្រួមបាន។ នោះវាមានប៉ូលនិងធាតុសូន្យផ្សេងៗគ្នា។

សម្គាល់

១. $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ ជាអនុគមន៍សនិទាន ឬ ប្រភាគសនិទាន ឬ ប្រភាគមួយដែល

មានមេគុណ ជាចំនួនពិត។ អនុគមន៍នេះកំណត់បាន កាលណា $Q(x) \neq 0$ ។

២. ប៉ូលនៃប្រភាគ F ជាប្រភេទនៃពហុធាតុបែង Q និង ធាតុសូន្យនៃប្រភាគ F ជាប្រភេទនៃពហុធាតុគតិក P ។

- បើដឺក្រេនៃ $P(x)$ ធំជាងឬស្មើនឹងដឺក្រេនៃ $Q(x)$ គេសរសេរ

$\deg P(x) \geq \deg Q(x)$ នោះយើងត្រូវយកពហុធាតុ $P(x)$ ចែកនឹង $Q(x)$ តែម្តង។

- បើដឺក្រេនៃ $P(x)$ តូចជាងដឺក្រេនៃ $Q(x)$ គេសរសេរ $\deg P(x) < \deg Q(x)$ និង

តាមទ្រឹស្តីពីជគណិត ពហុធាតុបែងអាចដាក់ជាកត្តាក្នុង $\mathbb{R}$ ក្រោមទម្រង់ធម្មតាគឺ

$$Q(x) = (x - a_1)^{\alpha_1} \cdots (x - a_k)^{\alpha_k} [(x - b_1)^2 + c_1^2]^{\beta_1} \cdots [(x - b_l)^2 + c_l^2]^{\beta_l} \quad (2.1) \quad \text{។}$$

នាំឱ្យ $F(x)$ អាចបំបែកជាផលបូកធាតុងាយឬជាប្រភាគដោយផ្នែកឬជាប្រភាគតូចៗដែលយើងអាចគណនាអាំងតេក្រាលកំណត់តាមរូបមន្តបានគឺ

$$F(x) = \sum_{j=1}^{\alpha_1} \frac{A_{1j}}{(x-a_1)^j} + \cdots + \sum_{j=1}^{\alpha_k} \frac{A_{kj}}{(x-a_k)^j} + \sum_{m=1}^{\beta_1} \frac{B_{1m}x + C_{1m}}{[(x-b_1)^2 + c_1^2]^m} + \cdots + \sum_{m=1}^{\beta_l} \frac{B_{lm}x + C_{lm}}{[(x-b_l)^2 + c_l^2]^m} \quad (2.2) \quad \text{។}$$

ក្នុងករណីប៉ូលងាយ (ប៉ូលសាមញ្ញ) ជាចំនួនពិត ឬ ជាចំនួនកុំផ្លិច នោះយើងប្រើវិធីរកមេគុណដូចតទៅ៖

$$\text{- បើ } F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-a)Q_1(x)} = \frac{A}{(x-a)} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} \quad \text{នោះ}$$

$$A = \frac{P(a)}{Q_1(a)} = \frac{P(a)}{Q'(a)} = \text{Res}(F) \quad (\text{រ៉េស៊ីឌុយនៃ } F \text{ ត្រង់ } a) \quad (2.3) \quad \text{។}$$

$$\text{- បើ } F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{[(x-b)^2 + c^2]Q_1(x)} = \frac{Bx + C}{(x-b)^2 + c^2} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} \quad \text{នាំឱ្យ}$$

$$[(x-b)^2 + c^2]F(x) = \frac{P(x)}{Q_1(x)} = Bx + C + [(x-b)^2 + c^2] \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} \quad \text{។}$$

ដោយតាង $x = b + ic$ នោះយើងបានសមីការថ្មីគឺ $Bx + C = \frac{P(x)}{Q_1(x)}$ (2.4) ដែល B និង

C ជាចំនួនដែលអាចកំណត់បាន។ វាអាចប្រើតម្លៃជំនួសនៃ x ដោយជ្រើសរើសស្មើនឹង $0, \pm 1, i, \dots$ ។

$$\text{ជាពិសេស បើ } F(x) = \sum_i \frac{A_i}{x-a_i} \quad \text{នាំឱ្យ}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xF(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_i \frac{x A_i}{x-a_i} = \sum_i A_i \quad \text{។}$$

$$\text{ដូចនេះ យើងបាន } \sum \text{Res}(F) = \lim_{x \rightarrow +\infty} xF(x) \quad (2.5) \quad \text{។}$$

ឧទាហរណ៍ទី១ ចូរបំបែក $F(x) = \frac{x^2 + x - 1}{(x-1)(x+1)(x-2)}$ ក្នុង $\mathbb{R}$ ឬក៏សរសេរ F ជាប្រភាគដោយផ្នែក។

ជំនួយស្រាយ

របៀបទី១ យើងមាន $F(x) = \frac{x^2 + x - 1}{(x-1)(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}$

ដែល A, B និង C ជាចំនួនដែលត្រូវកំណត់។

$$\begin{aligned} \text{នាំឱ្យ } x^2 + x - 1 &= A(x+1)(x-2) + B(x-1)(x-2) + C(x-1)(x+1) \\ &= A(x^2 - x - 2) + B(x^2 - 3x + 2) + C(x^2 - 1) \\ &= (A+B+C)x^2 + (-A-3B)x + (-2A+2B-C) \end{aligned}$$

ដោយធ្វើមេគុណនៃត្រីធា យើងបាន៖

$$(I) \begin{cases} A+B+C=1 \\ -A-3B=1 \\ -2A+2B-C=-1 \end{cases}$$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ (I) ផ្តល់ឱ្យ $A = -\frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{6}$ និង $C = \frac{5}{3}$ ។

$$\text{ដូចនេះ } F(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{x-2} \quad \text{។}$$

របៀបទី២ យើងមាន $F(x) = \frac{x^2 + x - 1}{(x-1)(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}$

ដែល A, B និង C ជាចំនួនដែលត្រូវកំណត់។

$$\text{នាំឱ្យ } x^2 + x - 1 = A(x+1)(x-2) + B(x-1)(x-2) + C(x-1)(x+1) \quad (*) \quad \text{។}$$

$$\text{- យើងយក } x=1 \text{ ជំនួសក្នុងសមីការ } (*) \text{ ផ្តល់ឱ្យ } 1 = -2A \Rightarrow A = -\frac{1}{2} \quad \text{។}$$

$$\text{- យើងយក } x=-1 \text{ ជំនួសក្នុងសមីការ } (*) \text{ ផ្តល់ឱ្យ } -1 = 6B \Rightarrow B = -\frac{1}{6} \quad \text{។}$$

$$\text{- យើងយក } x=2 \text{ ជំនួសក្នុងសមីការ } (*) \text{ ផ្តល់ឱ្យ } 5 = 3C \Rightarrow C = \frac{5}{3} \quad \text{។}$$

$$\text{ដូចនេះ } F(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{x-2} \quad \text{។}$$

របៀបទី៣ យើងមាន $F(x) = \frac{x^2 + x - 1}{(x-1)(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}$

$$\text{ដែល } A = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)F(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 1}{(x+1)(x-2)} = -\frac{1}{2}$$

$$B = \lim_{x \rightarrow -1} (x+1)F(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x - 1}{(x-1)(x-2)} = -\frac{1}{6}$$

$$\text{និង } C = \lim_{x \rightarrow 2} (x-2)F(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 1}{(x-1)(x+1)} = \frac{5}{3} \text{ ។}$$

$$\text{ដូចនេះ } F(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{x-2} \text{ ។}$$

សម្គាល់ ចំពោះរបៀបទី១ និងទី២ គេច្រើនប្រើប្រាស់វានៅកម្រិតមធ្យមសិក្សា រីឯរបៀបទី៣ វិញ គេប្រើប្រាស់វានៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។

ឧទាហរណ៍ទី២ ចូរបំបែក $F(x) = \frac{x^4}{(x+1)(x^2+1)}$ ក្នុង $\mathbb{R}$ ។

ដំណោះស្រាយ

របៀបទី១ តាមវិធីចែកពហុធា យើងបាន

$$F(x) = \frac{x^4}{(x+1)(x^2+1)} = x-1 + \frac{1}{(x+1)(x^2+1)}$$

$$\text{និងប្រភាគ } F_1(x) = \frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

ដែល A, B និង C ជាចំនួនដែលត្រូវកំណត់។

$$\begin{aligned} \text{នាំឱ្យ } 1 &= A(x^2+1) + (Bx+C)(x+1) \\ &= (A+B)x^2 + (B+C)x + (A+C) \end{aligned}$$

ដោយផ្អែកលើមេគុណនៃត្រីធា យើងបាន៖

$$(II) \begin{cases} A+B=0 \\ B+C=0 \\ A+C=1 \end{cases}$$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ (II) ផ្តល់ឱ្យ $A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2}$ និង $C = \frac{1}{2}$ ។

$$\text{ដូចនេះ } F(x) = x-1 + F_1(x) = x-1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{-x+1}{x^2+1} \text{ ។}$$

របៀបទី២ តាមវិធីចែកពហុធា យើងបាន

$$F(x) = \frac{x^4}{(x+1)(x^2+1)} = x-1 + \frac{1}{(x+1)(x^2+1)}$$

$$\text{និងប្រភាគ } F_1(x) = \frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

ដែល A, B និង C ជាចំនួនដែលត្រូវកំណត់។

$$\text{នាំឱ្យ } A = \lim_{x \rightarrow -1} (x+1)F_1(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{(x^2+1)} = \frac{1}{2} \text{ ។}$$

ដើម្បីកំណត់ B និង C យើងអាចគុណ $F_1(x)$ នឹង (x^2+1) រួចយក $x=i$ ផ្តល់ឱ្យ

$$\frac{1}{x+1} = Bx + C + (x^2+1)\left(\frac{A}{x+1}\right) \text{ និង } \frac{1}{i+1} = Bi + C$$

$$\text{នាំឱ្យ } B = -\frac{1}{2} \text{ និង } C = \frac{1}{2} \text{ ។}$$

$$\text{ដូចនេះ: } F(x) = x - 1 + F_1(x) = x - 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{-x+1}{x^2+1} \text{ ។}$$

២.២ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍សនិទានរាង $\int \frac{1}{(ax+b)^n} dx$

ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាល $\int \frac{1}{(ax+b)^n} dx$ យើងតាង $u = ax+b$ នាំឱ្យ

$$du = a dx \text{ សមមូល } dx = \frac{du}{a} \text{ (} a \neq 0 \text{) ។}$$

$$\text{នាំឱ្យ } \int \frac{1}{(ax+b)^n} dx = \int \frac{1}{u^n} \frac{du}{a} = \frac{1}{a} \int u^{-n} du \text{ ។}$$

បន្ទាប់មក យើងសិក្សាពីករណីគឺ $n=1$ និង $n \neq 1$ ។

- បើ $n=1$ នាំឱ្យ

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(ax+b)^n} dx &= \frac{1}{a} \int u^{-1} du = \frac{1}{a} \int \frac{du}{u} \\ &= \frac{1}{a} \ln|u| + c = \boxed{\frac{1}{a} \ln|ax+b| + c} \end{aligned} \quad (2.6)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- បើ $n \neq 1$ នាំឱ្យ

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(ax+b)^n} dx &= \frac{1}{a} \int u^{-n} du = \frac{u^{-n+1}}{a(-n+1)} + c \\ &= \frac{-1}{a(n-1)} \cdot \frac{1}{u^{n-1}} + c = \boxed{\frac{-1}{a(n-1)} \cdot \frac{1}{(ax+b)^{n-1}} + c} \end{aligned} \quad (2.7)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ឧទាហរណ៍ទី៣ គណនា $\int \frac{3}{4x+5} dx$ និង $\int \frac{1}{(2x-1)^7} dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (2.6) និង (2.7) យើងបាន៖

$$\int \frac{3}{4x+5} dx = 3 \int \frac{1}{4x+5} dx = \frac{3}{4} \ln|4x+5| + c$$

$$\text{និង } \int \frac{1}{(2x-1)^7} dx = \frac{-1}{2(7-1)} \cdot \frac{1}{(2x-1)^{7-1}} + c = -\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{(2x-1)^6} + c \quad \text{។}$$

២.៣ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍សនិទានរាង $\int \frac{dx}{x^2 \pm a^2}$

ជាមុនដំបូង យើងគណនា $\int \frac{dx}{x^2 + a^2}$ ឬ $\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$ ដែលជាអាំងតេក្រាលមិន

កំណត់។ តាង $x = a \tan t$ នាំឱ្យ $t = \arctan \frac{x}{a} = \tan^{-1} \frac{x}{a}$ ($a \neq 0$) និង $dx = \frac{a}{\cos^2 t} dt$ ។

តាមរូបមន្តប្តូរអថេរ យើងបាន៖

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 + a^2} &= \int \frac{1}{(a \tan t)^2 + a^2} \cdot \frac{a dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{a} \int \cos^2 t \cdot \frac{dt}{\cos^2 t} \\ &= \frac{1}{a} \int dt = \frac{1}{a} t + c = \boxed{\frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + c} = \boxed{\frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + c} \quad (2.8) \end{aligned}$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ និង $a \neq 0$ ។

សម្គាល់ គេសរសេរអនុគមន៍ប្រាសនៃអនុគមន៍ $\tan x$ ឬ $\tan x$ ដោយ $\arctg x$ ឬ $\arctan x$ ឬ $\tan^{-1} x$ ។

បន្ទាប់មក យើងគណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = - \int \frac{dx}{a^2 - x^2}$ ។

អាំងតេក្រាល $\int \frac{dx}{a^2 - x^2}$ មានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $\frac{1}{a^2 - x^2}$ ($a \neq 0$) ដែលយើងអាចសរសេរវាជា ប្រភាគដោយផ្នែកខាងក្រោម៖

$$\text{យើងមាន } \frac{1}{a^2 - x^2} = \frac{1}{(a-x)(a+x)} = \frac{A}{a-x} + \frac{B}{a+x}$$

ក្នុងនោះ A និង B ជាចំនួនដែលត្រូវកំណត់។ យើងអាចកំណត់ចំនួន A និង B តាមពីរបៀប។

របៀបទី១

យើងមាន

$$\frac{1}{a^2 - x^2} = \frac{A}{a - x} + \frac{B}{a + x} = \frac{A(a + x) + B(a - x)}{(a - x)(a + x)} = \frac{(A - B)x + Aa + Ba}{a^2 - x^2} \quad \text{។}$$

តាមការផ្អាកភាគយក នាំឱ្យ $A - B = 0$ និង $Aa + Ba = 1$ ។ នាំឱ្យ $A = B = \frac{1}{2a}$ ។

របៀបទី២

យើងមាន
$$\frac{1}{a^2 - x^2} = \frac{A}{a - x} + \frac{B}{a + x} \quad \text{។}$$

- គុណអង្គទាំងពីរនឹង $(a - x)$ រួចយក $x = a$ នាំឱ្យ $A = \frac{1}{a + a} = \frac{1}{2a}$ ។

- គុណអង្គទាំងពីរនឹង $(a + x)$ រួចយក $x = -a$ នាំឱ្យ $B = \frac{1}{a - (-a)} = \frac{1}{2a}$ ។

យើងបាន
$$\frac{1}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{a - x} + \frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{a + x} \quad \text{។}$$

នាំឱ្យ
$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \int \left(\frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{a - x} + \frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{a + x} \right) dx$$

$$= -\frac{1}{2a} \ln|a - x| + \frac{1}{2a} \ln|a + x| + c = \boxed{\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a + x}{a - x} \right| + c} \quad (2.9)$$

និង
$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = -\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = -\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a + x}{a - x} \right| + c_1$$

$$= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a - x}{a + x} \right| + c_1 = \boxed{\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + c_1} \quad (2.10)$$

ដែល c និង c_1 ជាចំនួនពិតថេរ ហើយ $a \neq 0$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៤ គណនាអាំងតេក្រាល $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$ និង $\int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (2.8) យើងបាន៖

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \arctan t \Big|_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4} \approx 0.7854$$

និងតាង $u = \ln x$ នាំឱ្យ $x = e^u$ និង $du = \frac{dx}{x}$ ។ ពិនិត្យគោល៖ បើ $x=1$ នោះ $u=0$ និង បើ $x=e$ នោះ $u=1$ ។

$$\text{នាំឱ្យ} \quad \int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)} = \int_0^1 \frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi}{4} \quad \text{។}$$

ឧទាហរណ៍ទី៥ គណនាអាំងតេក្រាល $\int_2^3 \frac{dt}{1-t^2}$ និង $\int_5^7 \frac{dx}{x^2-16}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (2.9) និង (2.10) យើងអាចគណនាអាំងតេក្រាលកំណត់ $\int_2^3 \frac{dt}{1-t^2}$ និង

$$\int_5^7 \frac{dx}{x^2-16} \quad \text{ដូចតទៅ៖}$$

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{dt}{1-t^2} &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| \Big|_2^3 = \frac{1}{2} \left[\ln \frac{4}{2} - \ln \frac{3}{1} \right] \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{2}{3} \approx -0.2027 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{និង} \quad \int_5^7 \frac{dx}{x^2-16} &= \int_5^7 \frac{dx}{x^2-4^2} = \frac{1}{2(4)} \ln \left| \frac{x-4}{x+4} \right| \Big|_5^7 \\ &= \frac{1}{8} \left(\ln \frac{3}{11} - \ln \frac{1}{9} \right) = \frac{1}{8} \ln \left(\frac{27}{11} \right) \quad \text{។} \end{aligned}$$

២.៤ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍សនិទានរាង $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$

អាំងតេក្រាល $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំង

តេក្រាល $\frac{1}{ax^2+bx+c}$ ។ អនុគមន៍នេះមានពហុធាកាតបែងជាត្រីធា ax^2+bx+c

($a \neq 0$) ។

យើងនឹងសិក្សាតាម $\Delta = b^2 - 4ac$ ដើម្បីស្វែងរកឫសនៃត្រីធានេះ។

១. ប្រសិនបើ $\Delta = 0$ នោះត្រីធាមានឫសឌុបគឺ $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ ។

នាំឱ្យ $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ និង

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} &= \int \frac{dx}{a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \frac{-1}{a} \cdot \frac{1}{x + \frac{b}{2a}} + c_1 \\ &= \boxed{\frac{-2}{2ax + b} + c_1} = \boxed{\frac{-2}{(ax^2 + bx + c)'} + c_1} \quad (2.11) \end{aligned}$$

ដែល c_1 ជាចំនួនថេរ និង $a \neq 0$ ។

២. ប្រសិនបើ $\Delta > 0$ នោះត្រីធាមានឫសពីរផ្សេងគ្នាគឺ $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ ឬ

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{។}$$

នាំឱ្យ $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ និង

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} &= \int \frac{dx}{a(x - x_1)(x - x_2)} = \int \frac{[(x - x_2) - (x - x_1)]dx}{a(x_1 - x_2)(x - x_1)(x - x_2)} \\ &= \frac{1}{a(x_1 - x_2)} \int \left[\frac{1}{x - x_1} - \frac{1}{x - x_2} \right] dx = \frac{1}{a(x_1 - x_2)} [\ln|x - x_1| - \ln|x - x_2|] + c_1 \\ &= \boxed{\frac{1}{a(x_1 - x_2)} \ln \left| \frac{x - x_1}{x - x_2} \right| + c_1} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{\Delta}} \ln \left| \frac{x - x_1}{x - x_2} \right| + c_1} \quad (2.12) \end{aligned}$$

ដែល c_1 ជាចំនួនថេរ និង $a \neq 0$ ។

៣. ប្រសិនបើ $\Delta < 0$ នោះត្រីធាគ្មានឫសចំនួនពិតទេ។ នាំឱ្យត្រីធាអាចសរសេរជា

$$ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right] = a \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2 \right]$$

$$\text{និង} \quad \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2} = \frac{1}{a\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)} \arctan \left(\frac{x + \frac{b}{2a}}{\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}} \right) + c_1$$

$$= \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \arctan\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right) + c_1 = \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \arctan\left(\frac{(ax^2+bx+c)'}{\sqrt{-\Delta}}\right) + c_1 \quad (2.13)$$

ដែល c_1 ជាចំនួនថេរ និង $a \neq 0$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៦ គណនា $\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)}$ ($a \neq b$, $(a, b) \neq (0, 0)$), $\int_4^5 \frac{dt}{(t-2)(t-3)}$

និង $\int_3^6 \frac{dv}{v^2-3v+2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (2.12) យើងបាន៖

$$\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{(a-b)} \ln \left| \frac{x-a}{x-b} \right| + c \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \int_4^5 \frac{dt}{(t-2)(t-3)} &= \frac{1}{(3-2)} \ln \left| \frac{t-3}{t-2} \right| \Big|_4^5 \\ &= \ln \frac{2}{3} - \ln \frac{1}{2} = \ln \left(\frac{2/3}{1/2} \right) = \ln \frac{4}{3} \approx 0.2877 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{និង } \int_3^6 \frac{dv}{v^2-3v+2} &= \int_3^6 \frac{dv}{(v-1)(v-2)} = \frac{1}{(2-1)} \ln \left| \frac{v-2}{v-1} \right| \Big|_3^6 \\ &= \ln \frac{4}{5} - \ln \frac{1}{2} = \ln \left(\frac{4/5}{1/2} \right) = \ln \frac{8}{5} \approx 0.4700 \text{ ។} \end{aligned}$$

ឧទាហរណ៍ទី៧ គណនា $\int \frac{1}{4x^2-24x+36} dx$ និង $\int \frac{3x}{x^4-2x^2+2} dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមានត្រីកោណ $4x^2-24x+36$ មាន $\Delta = b^2 - 4ac = (-24)^2 - 4(4)(36) = 0$ នោះ

តាមរូបមន្ត (2.11) យើងបាន៖

$$\int \frac{1}{4x^2-24x+36} dx = \frac{-2}{(4x^2-24x+36)'} + c = \frac{-2}{8x-24} + c = \frac{-1}{4x-12} + c \text{ ។}$$

ចំពោះអាំងតេក្រាល $\int \frac{3x}{x^4 - 2x^2 + 2} dx$ យើងតាង $y = x^2$ នាំឱ្យ

$$dy = 2x dx \Leftrightarrow x dx = \frac{1}{2} dy \text{ និង } \int \frac{3x}{x^4 - 2x^2 + 2} dx = \frac{3}{2} \int \frac{1}{y^2 - 2y + 2} dy \text{ ។}$$

ប៉ុន្តែត្រីកោណ $y^2 - 2y + 2$ មាន $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(2) = 4 - 8 = -4 < 0$ នោះ
តាមរូបមន្ត (2.13) យើងបាន៖

$$\begin{aligned} \int \frac{3x}{x^4 - 2x^2 + 2} dx &= \frac{3}{2} \int \frac{1}{y^2 - 2y + 2} dy \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{4}} \arctan\left(\frac{(y^2 - 2y + 2)'}{\sqrt{4}}\right) + c \\ &= \frac{3}{2} \arctan\left(\frac{2y - 2}{2}\right) + c \\ &= \frac{3}{2} \arctan(y - 1) + c = \frac{3}{2} \arctan(x^2 - 1) + c \text{ ។} \end{aligned}$$

២.៥ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍សនិទានរាង $\int \frac{(a_1 x + b_1) dx}{a x^2 + b x + c}$

អាំងតេក្រាល $\int \frac{(a_1 x + b_1) dx}{a x^2 + b x + c}$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំង

តេក្រាល $F(x) = \frac{a_1 x + b_1}{a x^2 + b x + c}$ ។ អនុគមន៍នេះមានពហុធាតុភាគយកជាទ្វេដា $a_1 x + b_1$

($a_1 \neq 0$) និងពហុធាតុភាគបែងជាត្រីកោណ $a x^2 + b x + c$ ($a \neq 0$) ។ យើងនឹងសិក្សាពីករណី
ដូចតទៅ៖

- ប្រសិនបើ $a_1 x + b_1 = k(2a x + b)$ នាំឱ្យ $\frac{a_1 x + b_1}{a x^2 + b x + c} = \frac{k(2a x + b)}{a x^2 + b x + c}$ និង

$$\begin{aligned} \int \frac{(a_1 x + b_1) dx}{a x^2 + b x + c} &= \int \frac{k(2a x + b) dx}{a x^2 + b x + c} = k \int \frac{(a x^2 + b x + c)' dx}{a x^2 + b x + c} \\ &= \boxed{k \ln|a x^2 + b x + c| + c_1} \quad (2.15) \end{aligned}$$

ដែល c_1 ជាចំនួនថេរ។

- ប្រសិនបើ $a_1 x + b_1 \neq k(2a x + b)$ នាំឱ្យ

$$\frac{a_1 x + b_1}{a x^2 + b x + c} = \frac{\frac{a_1}{2a}(2a x + b) + b_1 - \frac{a_1 b}{2a}}{a x^2 + b x + c}$$

$$= \frac{a_1}{2a} \cdot \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c} + (b_1 - \frac{a_1 b}{2a}) \cdot \frac{1}{ax^2+bx+c}$$

$$\begin{aligned} \text{និង } \int \frac{(a_1 x + b_1) dx}{ax^2+bx+c} &= \frac{a_1}{2a} \int \frac{(2ax+b) dx}{ax^2+bx+c} + (b_1 - \frac{a_1 b}{2a}) \int \frac{dx}{ax^2+bx+c} \\ &= \left[\frac{a_1}{2a} \ln|ax^2+bx+c| + (b_1 - \frac{a_1 b}{2a}) \int \frac{dx}{ax^2+bx+c} \right] \quad (2.16) \end{aligned}$$

ដែលអាំងតេក្រាល $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ អាចកំណត់បាននៅផ្នែក ២.៤ ។

ឧទាហរណ៍ទី៨ គណនា $\int \frac{(6x-5)}{3x^2-5x+6} dx$ និង $\int \frac{3x+2}{x^2+x+1} dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមានត្រីកោណ $3x^2-5x+6$ និង $(3x^2-5x+6)' = 6x-5$ នោះតាមរូបមន្ត (2.15)

យើងបាន៖

$$\int \frac{(6x-5)}{3x^2-5x+6} dx = \ln|3x^2-5x+6| + c_1$$

និងតាមរូបមន្ត (2.16) នាំឱ្យ

$$\begin{aligned} \int \frac{3x+2}{x^2+x+1} dx &= \frac{3}{2(1)} \ln|x^2+x+1| + \left(2 - \frac{3 \times 1}{2(1)}\right) \int \frac{dx}{x^2+x+1} \\ &= \frac{3}{2} \ln(x^2+x+1) + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \\ &= \frac{3}{2} \ln(x^2+x+1) + \frac{1}{2} \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \arctan \left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \right) + c \\ &= \frac{3}{2} \ln(x^2+x+1) + \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) + c \quad \text{។} \end{aligned}$$

ម្យ៉ាងទៀត អនុគមន៍អាំងតេក្រាល $F(x) = \frac{a_1 x + b_1}{ax^2+bx+c}$ មានពហុធាតុបែងជា

ត្រីកោណ ax^2+bx+c ($a \neq 0$) ដែលមាន $\Delta = b^2 - 4ac$ ។ ឥឡូវនេះ យើងអាចគណនា

អាំងតេក្រាល $\int \frac{(a_1 x + b_1) dx}{a x^2 + b x + c}$ តាមវិធីផ្សេងទៀតដោយសិក្សាករណី $\Delta \geq 0$ ។ ចំពោះ

ករណី $\Delta < 0$ យើងត្រូវគណនាវាតាមរូបមន្ត (2.16) ។

១. ប្រសិនបើ $\Delta = 0$ នោះត្រីធាមានឫសឌុបគឺ $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ ។

នាំឱ្យ $a x^2 + b x + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$ និង

$$F(x) = \frac{a_1 x + b_1}{a x^2 + b x + c} = \frac{a_1 x + b_1}{a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2} = \frac{A}{x + \frac{b}{2a}} + \frac{B}{\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2}$$

ក្នុងនោះ A និង B ជាចំនួនដែលត្រូវកំណត់។

នាំឱ្យយើងបានសមភាពនៃពហុធា $\left(\frac{a_1}{a} \right) x + \frac{b_1}{a} = A \left(x + \frac{b}{2a} \right) + B = A x + A \frac{b}{2a} + B$

នាំឱ្យ $A = \frac{a_1}{a}$ និង $\frac{b A}{2a} + B = \frac{b_1}{a}$ នាំឱ្យ $A = \frac{a_1}{a}$ និង $B = \frac{b_1}{a} - \frac{b A}{2a} = \frac{2ab_1 - ba_1}{2a^2}$ ។

នាំឱ្យ

$$\begin{aligned} \int \frac{(a_1 x + b_1) dx}{a x^2 + b x + c} &= \int \frac{a_1 x + b_1}{a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2} dx = A \int \frac{1}{x + \frac{b}{2a}} dx + B \int \frac{1}{\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2} dx \\ &= A \ln \left| x + \frac{b}{2a} \right| + B \frac{\left(x + \frac{b}{2a} \right)^{-1}}{(-1)} + c_1 \\ &= A \ln \left| x + \frac{b}{2a} \right| - \frac{B}{x + \frac{b}{2a}} + c_1 \\ &= A \ln |2a x + b| - \frac{2a B}{2a x + b} + c_2 \\ &= \boxed{\frac{a_1}{a} \ln |2a x + b| - \left(\frac{2ab_1 - ba_1}{a} \right) \frac{1}{2a x + b} + c_2} \quad (2.17) \end{aligned}$$

ដែល c_2 ជាចំនួនថេរ និង $a \neq 0$ ។

២. ប្រសិនបើ $\Delta > 0$ នោះត្រីធាមានឫសពីរផ្សេងគ្នាគឺ $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ ឬ

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ។}$$

នាំឱ្យ $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ និង

$$F(x) = \frac{a_1x + b_1}{ax^2 + bx + c} = \frac{a_1x + b_1}{a(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2}$$

$$\text{ដែល } A = \lim_{x \rightarrow x_1} (x - x_1)F(x) = \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{a_1x + b_1}{a(x - x_2)} = \frac{a_1x_1 + b_1}{a(x_1 - x_2)} = \frac{a_1x_1 + b_1}{\sqrt{\Delta}}$$

$$\text{និង } B = \lim_{x \rightarrow x_2} (x - x_2)F(x) = \lim_{x \rightarrow x_2} \frac{a_1x + b_1}{a(x - x_1)} = \frac{a_1x_2 + b_1}{a(x_2 - x_1)} = -\frac{a_1x_2 + b_1}{\sqrt{\Delta}} \text{ ។}$$

នាំឱ្យ

$$\begin{aligned} \int \frac{(a_1x + b_1)dx}{ax^2 + bx + c} &= \int \frac{(a_1x + b_1)dx}{a(x - x_1)(x - x_2)} = \int \left(\frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} \right) dx \\ &= \boxed{A \ln|x - x_1| + B \ln|x - x_2| + c_1} \quad (2.18) \end{aligned}$$

$$\text{ដែល } A = \frac{a_1x_1 + b_1}{a(x_1 - x_2)} = \frac{a_1x_1 + b_1}{\sqrt{\Delta}} \text{ និង } B = \frac{a_1x_2 + b_1}{a(x_2 - x_1)} = -\frac{a_1x_2 + b_1}{\sqrt{\Delta}} \text{ ហើយ } c_1 \text{ ជា}$$

ចំនួនថេរ និង $a \neq 0$ ។

$$\text{ឧទាហរណ៍ទី៩ គណនា } \int \frac{(8x+5)}{4x^2-12x+9} dx \text{ និង } \int \frac{3x+11}{x^2-x-6} dx \text{ ។}$$

ដំណោះស្រាយ

$$\text{ត្រីធា } 4x^2 - 12x + 9 \text{ មាន } \Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4(4)(9) = 0 \text{ នោះតាមរូបមន្ត (2.17)}$$

យើងបាន៖

$$\begin{aligned} \int \frac{(8x+5)}{4x^2-12x+9} dx &= \frac{8}{4} \ln|8x-12| - \left(\frac{2(4)(5) - (-12)(8)}{4} \right) \cdot \frac{1}{8x-12} + c_1 \\ &= 2 \ln|8x-12| - \frac{34}{8x-12} + c_1 \text{ ។} \end{aligned}$$

$$\text{ចំពោះត្រីធា } x^2 - x - 6 \text{ មាន } \Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(-6) = 25 > 0 \text{ នោះត្រីធា}$$

$$\text{មានឫសពីរគឺ } x_1 = \frac{1+5}{2(1)} = 3, x_2 = \frac{1-5}{2(1)} = -2 \text{ ។}$$

តាមរូបមន្ត (2.18) យើងបាន៖

$$\begin{aligned}\int \frac{3x+11}{x^2-x-6} dx &= \frac{3(3)+11}{5} \ln|x-3| - \frac{3(-2)+11}{5} \ln|x+2| + c_1 \\ &= 4 \ln|x-3| - \ln|x+2| + c_1 \quad \text{។}\end{aligned}$$

២.៦ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍សនិទានរាង $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^m}$

អាំងតេក្រាល $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^m}$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេ

ក្រាល $F(x) = \frac{1}{(x^2+a^2)^m}$ ។ អនុគមន៍នេះ ជាប្រភាគសនិទាន កាលណា $m \in \mathbb{N}$ ។ យើង

នឹងសិក្សាពីករណី $m=1$ និង $m \neq 1$ ដូចតទៅ៖

- ករណី $m=1$ នោះតាមផ្នែក ២.៣ (រូបមន្ត (2.8)) យើងបាន៖

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^m} = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

ដែល c ជាចំនួនថេរ និង $a \neq 0$ ។

- ករណី $m \neq 1$ យើងតាង $I_m = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^m}$ ។ យើងនឹងរកទំនាក់ទំនងរវាង I_m

និង I_{m-1} ។

$$\begin{aligned}\text{នាំឱ្យ } I_{m-1} &= \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{m-1}} = \int \frac{(x^2+a^2) dx}{(x^2+a^2)^m} \\ &= \int \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^m} + \int \frac{a^2 dx}{(x^2+a^2)^m} \\ &= \int \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^m} + a^2 I_m = J_m + a^2 I_m \quad (*)\end{aligned}$$

ដែល $J_m = \int \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^m}$ ។

យើងប្រើវិធីអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក ដោយយក $u = x$ និង $dv = \frac{x dx}{(x^2+a^2)^m}$ នាំឱ្យ

$$du = dx \quad \text{និង} \quad v = \int \frac{x dx}{(x^2+a^2)^m} = \frac{1}{2} \int (x^2+a^2)^{-m} d(x^2+a^2) = \frac{-1}{2(m-1)(x^2+a^2)^{m-1}} \quad \text{។}$$

$$\begin{aligned}
 \text{នាំឱ្យ } J_m &= \int \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^m} = \int u dv = uv - \int v du \\
 &= \frac{-x}{2(m-1)(x^2 + a^2)^{m-1}} + \frac{1}{2(m-1)} \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{m-1}} \\
 &= \frac{-x}{2(m-1)(x^2 + a^2)^{m-1}} + \frac{1}{2(m-1)} I_{m-1} \text{ ។}
 \end{aligned}$$

ពីសមីការ (*) យើងបាន៖

$$I_{m-1} = J_m + a^2 I_m = \frac{-x}{2(m-1)(x^2 + a^2)^{m-1}} + \frac{1}{2(m-1)} I_{m-1} + a^2 I_m$$

$$\text{នាំឱ្យ } a^2 I_m = \frac{x}{2(m-1)(x^2 + a^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2(m-1)} I_{m-1}$$

$$\text{នាំឱ្យ } I_m = \frac{x}{2(m-1)a^2 (x^2 + a^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2(m-1)a^2} I_{m-1} \text{ ។}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^m} = \frac{x}{2(m-1)a^2 (x^2 + a^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2(m-1)a^2} \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{m-1}}} \quad (2.19)$$

ដែល $a \neq 0$ ។

$$\text{ឧទាហរណ៍ទី១០ គណនា } \int \frac{dx}{(x^2 + 4)^2} \text{ និង } \int \frac{dx}{(x^2 + 4)^3} \text{ ។}$$

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (2.19) និង (2.8) យើងបាន៖

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{(x^2 + 4)^2} &= \frac{x}{2(2-1)(4)(x^2 + 4)} + \frac{2(2)-3}{2(2-1)(4)} \int \frac{dx}{x^2 + 4} \\
 &= \frac{x}{8(x^2 + 4)} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} + c \\
 &= \frac{x}{8(x^2 + 4)} + \frac{1}{16} \arctan \frac{x}{2} + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{និង } \int \frac{dx}{(x^2+4)^3} &= \frac{x}{2(3-1)(4)(x^2+4)^2} + \frac{2(3)-3}{2(3-1)(4)} \int \frac{dx}{(x^2+4)^2} \\
&= \frac{x}{16(x^2+4)^2} + \frac{3}{16} \left[\frac{x}{8(x^2+4)} + \frac{1}{16} \arctan \frac{x}{2} \right] + c_1 \\
&= \frac{x}{16(x^2+4)^2} + \frac{3x}{128(x^2+4)} + \frac{3}{256} \arctan \frac{x}{2} + c_1 \quad \text{។}
\end{aligned}$$

២.៧ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍សនិទានរាង $\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^m}$

អាំងតេក្រាល $\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^m}$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេ

ក្រាល $F(x) = \frac{1}{(x^2-a^2)^m}$ ។ អនុគមន៍នេះ ជាប្រភាគសនិទាន កាលណា $m \in \mathbb{N}$ ។ យើង

នឹងសិក្សាពីករណី $m=1$ និង $m \neq 1$ ដូចតទៅ៖

- ករណី $m=1$ នោះតាមផ្នែក ២.៣ (រូបមន្ត (2.10)) យើងបាន៖

$$\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^m} = \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a-x}{a+x} \right| + c_1 = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c_1$$

ដែល c_1 ជាចំនួនថេរ និង $a \neq 0$ ។

- ករណី $m \neq 1$ យើងតាង $I_m = \int \frac{dx}{(x^2-a^2)^m}$ ។ យើងនឹងរកទំនាក់ទំនងរវាង I_m

និង I_{m-1} ។

$$\begin{aligned}
\text{នាំឱ្យ } I_{m-1} &= \int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{m-1}} = \int \frac{(x^2-a^2) dx}{(x^2-a^2)^m} \\
&= \int \frac{x^2 dx}{(x^2-a^2)^m} - \int \frac{a^2 dx}{(x^2-a^2)^m} \\
&= \int \frac{x^2 dx}{(x^2-a^2)^m} - a^2 I_m = J_m - a^2 I_m \quad (*_1)
\end{aligned}$$

ដែល $J_m = \int \frac{x^2 dx}{(x^2-a^2)^m}$ ។

យើងប្រើវិធីអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក ដោយយក $u = x$ និង $dv = \frac{x dx}{(x^2 - a^2)^m}$ នាំឱ្យ

$$du = dx \text{ និង } v = \int \frac{x dx}{(x^2 - a^2)^m} = \frac{1}{2} \int (x^2 - a^2)^{-m} d(x^2 - a^2) = \frac{-1}{2(m-1)(x^2 - a^2)^{m-1}} \text{ ។}$$

$$\begin{aligned} \text{នាំឱ្យ } J_m &= \int \frac{x^2 dx}{(x^2 - a^2)^m} = \int u dv = uv - \int v du \\ &= \frac{-x}{2(m-1)(x^2 - a^2)^{m-1}} + \frac{1}{2(m-1)} \int \frac{dx}{(x^2 - a^2)^{m-1}} \\ &= \frac{-x}{2(m-1)(x^2 - a^2)^{m-1}} + \frac{1}{2(m-1)} I_{m-1} \text{ ។} \end{aligned}$$

ពីសមីការ $(*)_1$ យើងបាន៖

$$I_{m-1} = J_m - a^2 I_m = \frac{-x}{2(m-1)(x^2 - a^2)^{m-1}} + \frac{1}{2(m-1)} I_{m-1} - a^2 I_m$$

$$\text{នាំឱ្យ } a^2 I_m = \frac{-x}{2(m-1)(x^2 - a^2)^{m-1}} + \frac{3-2m}{2(m-1)} I_{m-1}$$

$$\text{នាំឱ្យ } I_m = \frac{-x}{2(m-1)a^2(x^2 - a^2)^{m-1}} + \frac{3-2m}{2(m-1)a^2} I_{m-1} \text{ ។}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\int \frac{dx}{(x^2 - a^2)^m} = \frac{-x}{2(m-1)a^2(x^2 - a^2)^{m-1}} + \frac{3-2m}{2(m-1)a^2} \int \frac{dx}{(x^2 - a^2)^{m-1}}} \quad (2.20)$$

ដែល $a \neq 0$ ។

ឧទាហរណ៍ទី១១ គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ $\int \frac{dx}{(x^2 - 4)^2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (2.20) និង (2.10) យើងបាន៖

$$\int \frac{dx}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-x}{2(2-1)(4)(x^2 - 4)} + \frac{3-2(2)}{2(2-1)(4)} \int \frac{dx}{x^2 - 4}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{x}{8(x^2-4)} - \frac{1}{8} \int \frac{dx}{x^2-4} \\
&= -\frac{x}{8(x^2-4)} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2(2)} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + c \\
&= -\frac{x}{8(x^2-4)} - \frac{1}{32} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + c \quad \text{។}
\end{aligned}$$

២.៨ អនុវត្តន៍នៃការបំបែកអនុគមន៍សនិទាន

ក្នុងផ្នែកនេះ យើងលើកយកឧទាហរណ៍មួយចំនួនដែលទាក់ទងនឹងការបំបែកប្រភាគសនិទានទៅជាប្រភាគដោយផ្នែក។ បន្ទាប់មក យើងនឹងគណនាអាំងតេក្រាល។

ឧទាហរណ៍ទី១២ គណនាអាំងតេក្រាល $\int F(x)dx$ ដែល

$$F(x) = \frac{x^2 + x - 1}{(x-1)(x+1)(x-2)} \quad \text{។}$$

ដំណោះស្រាយ

តាមឧទាហរណ៍ទី១ យើងមាន៖

$$F(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{x-2} \quad \text{។}$$

$$\begin{aligned}
\text{នាំឱ្យ } \int F(x)dx &= \int \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{x-2} \right) dx \\
&= -\frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{6} \ln|x+1| + \frac{5}{3} \ln|x-2| + c \quad \text{។}
\end{aligned}$$

ឧទាហរណ៍ទី១៣ គណនា $\int_3^4 \frac{dt}{t(t-1)(t-2)^2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

$$\text{យើងមាន } \frac{1}{t(t-1)(t-2)^2} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} + \frac{C}{(t-2)^2} + \frac{D}{t-2} \quad \text{។}$$

$$\text{- គុណអង្គទាំងពីរនឹង } t \text{ រួចយក } t=0 \text{ នាំឱ្យ } A = -\frac{1}{4} \text{ ។}$$

$$\text{- គុណអង្គទាំងពីរនឹង } (t-1) \text{ រួចយក } t=1 \text{ នាំឱ្យ } B = 1 \text{ ។}$$

- គុណអង្គទាំងពីរនឹង $(t-2)^2$ រួចយក $t=2$ នាំឱ្យ $C=\frac{1}{2}$ ។

- គុណអង្គទាំងពីរនឹង t រួចយក $t \rightarrow +\infty$ នាំឱ្យ $0=A+B+D$ នាំឱ្យ

$$D=-A-B=\frac{1}{4}-1=-\frac{3}{4} \text{ ។}$$

$$\begin{aligned} \text{យើងបាន } \frac{1}{t(t-1)(t-2)^2} &= -\frac{1}{4t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{2(t-2)^2} - \frac{3}{4(t-2)} \\ &= -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{2}(t-2)^{-2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{(t-2)} \text{ ។} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{នាំឱ្យ } \int_3^4 \frac{dt}{t(t-1)(t-2)^2} &= \int_3^4 \left(-\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{2}(t-2)^{-2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{(t-2)} \right) dt \\ &= -\frac{1}{4} \ln|t| + \ln|t-1| + \frac{1}{2} \cdot \frac{(t-2)^{-1}}{(-1)} - \frac{3}{4} \ln|t-2| \Bigg|_3^4 \\ &= \left(-\frac{1}{4} \ln 4 + \ln 3 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2^{-1}}{(-1)} - \frac{3}{4} \ln 2 \right) - \left(-\frac{1}{4} \ln 3 + \ln 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(-1)} - \frac{3}{4} \ln 1 \right) \\ &= \frac{-\ln 4 + 5 \ln 3 + 1 - 7 \ln 2}{4} \approx 0.0637 \text{ ។} \end{aligned}$$

ឧទាហរណ៍ទី១៤ គណនា $\int_0^1 \frac{u du}{u^3+1}$ ។

ដំណោះស្រាយ

$$\text{យើងមាន } \frac{u}{u^3+1} = \frac{u}{(u+1)(u^2-u+1)} = \frac{A}{u+1} + \frac{Bu+C}{u^2-u+1} \text{ ។}$$

- គុណអង្គទាំងពីរនឹង $(u+1)$ រួចយក $u=-1$ នាំឱ្យ $A=\frac{-1}{1+1+1}=-\frac{1}{3}$ ។

- គុណអង្គទាំងពីរនឹង u រួចយក $u \rightarrow +\infty$ នាំឱ្យ $0=A+B$ នាំឱ្យ

$$B=-A=-\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3} \text{ ។}$$

- យក $u=0$ នាំឱ្យ $A+C=0$ នាំឱ្យ $C=-A=-\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$ ។

$$\text{យើងបាន } \frac{u}{u^3+1} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{u+1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{u+1}{u^2-u+1}$$

$$= -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{u+1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{(2u-1)+3}{u^2-u+1}$$

$$= -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{u+1} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2u-1}{u^2-u+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\left(u-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \quad \text{។}$$

$$\text{នាំឱ្យ } \int_0^1 \frac{u \, du}{u^3+1} = \int_0^1 \left(-\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{u+1} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2u-1}{u^2-u+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\left(u-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \right) du$$

$$= -\frac{1}{3} \ln|u+1| + \frac{1}{6} \ln|u^2-u+1| + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(\sqrt{3}/2)} \arctan \left(\frac{u-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \right) \Bigg|_0^1$$

$$= \left(-\frac{1}{3} \ln 2 + \frac{1}{6} \ln 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} \right) - \left(-\frac{1}{3} \ln 1 + \frac{1}{6} \ln 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{-1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$= -\frac{1}{3} \ln 2 + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.3735 \quad \text{។}$$

ជាសរុប ជំពូកទី២នេះបានផ្តល់នូវវិធីសាស្ត្រនៃការបំបែកអនុគមន៍សនិទានក្នុង $\mathbb{R}$ និងវិធីសាស្ត្រគណនាអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍សនិទានមួយចំនួនដូចជា $\int \frac{1}{(ax+b)^n} dx$, $\int \frac{dx}{x^2 \pm a^2}$, $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$, $\int \frac{(a_1x+b_1)dx}{ax^2+bx+c}$, $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^m}$ និង $\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^m}$ ។ បន្ទាប់មក យើងនឹងបង្ហាញនិងសិក្សាអំពីប្រភេទអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អសនិទាននៅក្នុងជំពូកទី៣បន្តទៀត។

ជំពូកទី៣

ប្រភេទអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អសនិទាន

(Types of Integrals of Irrational Functions)

នៅក្នុងជំពូកទី៣នេះ យើងនឹងសិក្សាតែអំពីប្រភេទអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អសនិទានមួយចំនួននិងដំណោះស្រាយរបស់វាដូចតទៅ៖

៣.១ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អសនិទាន៣ $\int \frac{1}{\sqrt[n]{ax+b}} dx$

អាំងតេក្រាល $\int \frac{1}{\sqrt[n]{ax+b}} dx$ ($a \neq 0, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$) ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់

ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $\frac{1}{\sqrt[n]{ax+b}}$ ជាអនុគមន៍អសនិទាន។

ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាល $\int \frac{1}{\sqrt[n]{ax+b}} dx$ យើងតាង $t = \sqrt[n]{ax+b}$ នាំឱ្យ

$$t^n = ax+b \quad \text{និង} \quad nt^{n-1} dt = a dx \Leftrightarrow dx = \frac{n}{a} t^{n-1} dt \quad \text{។}$$

$$\text{នាំឱ្យ} \quad \int \frac{1}{\sqrt[n]{ax+b}} dx = \int \frac{\frac{n}{a} t^{n-1} dt}{t} = \frac{n}{a} \int t^{n-2} dt \quad \text{។}$$

$$= \frac{n}{a} \cdot \frac{t^{n-1}}{(n-1)} + c = \boxed{\frac{n \sqrt[n]{(ax+b)^{n-1}}}{(n-1)a} + c} \quad (3.1)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ឧទាហរណ៍ទី១ គណនា $\int \frac{1}{\sqrt{3x+4}} dx$ និង $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt[3]{5x+3}} dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (3.1) យើងបាន៖

$$\int \frac{1}{\sqrt{3x+4}} dx = \frac{2\sqrt{3x+4}}{3} + c$$

និង

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt[3]{5x+3}} dx = \frac{3\sqrt[3]{(5x+3)^2}}{2 \cdot 5} \Big|_1^2 = \frac{3}{10} \left(\sqrt[3]{13^2} - \sqrt[3]{8^2} \right)$$

$$= \frac{3}{10} \left(\sqrt[3]{169} - 4 \right) \approx 0.4586 \text{ ។}$$

៣.២ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អសនិទានរាង $\int \sqrt[n]{ax+b} dx$

អាំងតេក្រាល $\int \sqrt[n]{ax+b} dx$ ($a \neq 0, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$) ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $\sqrt[n]{ax+b}$ ជាអនុគមន៍អសនិទាន។

ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាល $\int \sqrt[n]{ax+b} dx$ យើងតាង $t = \sqrt[n]{ax+b}$ នាំឱ្យ

$$t^n = ax+b \text{ និង } nt^{n-1} dt = a dx \Leftrightarrow dx = \frac{n}{a} t^{n-1} dt \text{ ។}$$

$$\begin{aligned} \text{នាំឱ្យ } \int \sqrt[n]{ax+b} dx &= \int t \cdot \frac{n}{a} t^{n-1} dt = \frac{n}{a} \int t^n dt \\ &= \frac{n}{a} \cdot \frac{t^{n+1}}{(n+1)} + c = \boxed{\frac{n \sqrt[n]{(ax+b)^{n+1}}}{(n+1)a} + c} \quad (3.2) \end{aligned}$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ឧទាហរណ៍ទី២ គណនា $\int \sqrt{3x+4} dx$ និង $\int_1^2 \sqrt[3]{5x+3} dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (3.2) យើងបាន៖

$$\int \sqrt{3x+4} dx = \frac{2\sqrt{(3x+4)^{2+1}}}{(2+1) \cdot 3} + c = \frac{2\sqrt{(3x+4)^3}}{9} + c$$

និង

$$\begin{aligned} \int_1^2 \sqrt[3]{5x+3} dx &= \frac{3\sqrt[3]{(5x+3)^4}}{4 \cdot 5} \Big|_1^2 = \frac{3}{20} \left(\sqrt[3]{13^4} - \sqrt[3]{8^4} \right) \\ &= \frac{3}{20} \left(13\sqrt[3]{13} - 16 \right) \approx 2.1851 \text{ ។} \end{aligned}$$

៣.៣ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អសនិទាន៣ $\int \sqrt[n]{(ax+b)^m} dx$

អាំងតេក្រាល $\int \sqrt[n]{(ax+b)^m} dx$ ($a \neq 0, n \in \mathbb{N}, n \geq 2, m \in \mathbb{Z}$) ជាអាំងតេក្រាល

មិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $\sqrt[n]{(ax+b)^m}$ ជាអនុគមន៍អសនិទាន។

ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាល $\int \sqrt[n]{(ax+b)^m} dx$ យើងតាង $t = \sqrt[n]{ax+b}$ នាំឱ្យ

$$t^n = ax+b \text{ និង } nt^{n-1} dt = a dx \Leftrightarrow dx = \frac{n}{a} t^{n-1} dt \text{ ។}$$

$$\text{នាំឱ្យ } \int \sqrt[n]{(ax+b)^m} dx = \int t^m \cdot \frac{n}{a} t^{n-1} dt = \frac{n}{a} \int t^{m+n-1} dt \quad (*) \text{ ។}$$

បន្ទាប់មក យើងសិក្សាតែករណី $m+n \neq 0$ ។

នាំឱ្យ

$$\begin{aligned} \int \sqrt[n]{(ax+b)^m} dx &= \frac{n}{a} \int t^{m+n-1} dt = \frac{n}{a} \cdot \frac{t^{m+n}}{(m+n)} + c \\ &= \frac{n \sqrt[n]{(ax+b)^{m+n}}}{(m+n)a} + c \end{aligned} \quad (3.3)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ឧទាហរណ៍ទី៣ គណនា $\int \sqrt{(3x+4)^3} dx$ និង $\int_1^2 \sqrt[3]{(5x+3)^4} dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (3.3) យើងបាន៖

$$\int \sqrt{(3x+4)^3} dx = \frac{2\sqrt{(3x+4)^{3+2}}}{(3+2) \cdot 3} + c = \frac{2\sqrt{(3x+4)^5}}{15} + c$$

$$\begin{aligned} \text{និង } \int_1^2 \sqrt[3]{(5x+3)^4} dx &= \frac{3\sqrt[3]{(5x+3)^{4+3}}}{(4+3) \cdot 5} \Big|_1^2 = \frac{3}{35} \left(\sqrt[3]{13^7} - \sqrt[3]{8^7} \right) \\ &= \frac{3}{35} (169\sqrt[3]{13} - 128) \approx 23.0893 \text{ ។} \end{aligned}$$

៣.៤ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អសនិទានរាង $\int \frac{1}{\sqrt{k-x^2}} dx$

អាំងតេក្រាល $\int \frac{1}{\sqrt{k-x^2}} dx$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $\frac{1}{\sqrt{k-x^2}}$ ជាអនុគមន៍អសនិទាន។

ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាល $\int \frac{1}{\sqrt{k-x^2}} dx$ យើងអាចតាង $x = \sqrt{k} \sin t$ ($k > 0$)
ឬ $x = \sqrt{k} \cos t$ ($k > 0$) ។

បើយើងតាង $x = \sqrt{k} \sin t$ ($k > 0$) នាំឱ្យ $t = \arcsin \frac{x}{\sqrt{k}} = \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{k}}$ និង
 $dx = \sqrt{k} \cos t dt$ ។

$$\begin{aligned} \text{នាំឱ្យ } \int \frac{1}{\sqrt{k-x^2}} dx &= \int \frac{\sqrt{k} \cos t dt}{\sqrt{k-k \sin^2 t}} = \int \frac{\sqrt{k} \cos t dt}{\sqrt{k} \cos t} \\ &= \int dt = t + c = \boxed{\sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{k}} + c} \quad (3.4) \end{aligned}$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ឧទាហរណ៍ទី៤ គណនា $\int \frac{1}{\sqrt{5-x^2}} dx$ និង $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{16-9x^2}} dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (3.4) យើងបាន៖

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{5-x^2}} dx &= \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{5}} + c \\ \text{និង } \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{16-9x^2}} dx &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{9(\frac{16}{9}-x^2)}} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\frac{16}{9}-x^2}} dx \\ &= \frac{1}{3} \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{\frac{16}{9}}} \bigg|_0^1 = \frac{1}{3} \sin^{-1} \frac{3x}{4} \bigg|_0^1 \\ &= \frac{1}{3} \left(\sin^{-1} \frac{3}{4} - \sin^{-1} 0 \right) = \frac{1}{3} \sin^{-1} \frac{3}{4} \approx 0.2826 \quad \text{។} \end{aligned}$$

៣.៥ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អសនិទាន៣១ $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + k}} dx$

អាំងតេក្រាល $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + k}} dx$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $\frac{1}{\sqrt{x^2 + k}}$ ជាអនុគមន៍អសនិទាន។

ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាល $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + k}} dx$ យើងអាចតាង $x = \sqrt{k} \tan t$ ($k > 0$)

ឬ $t = \arctan \frac{x}{\sqrt{k}}$ ។

របៀបទី១ យើងតាង $x = \sqrt{k} \tan t$ ($k > 0$) នាំឱ្យ $t = \arctan \frac{x}{\sqrt{k}} = \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{k}}$,

$$\sec t = \frac{1}{\cos t} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{k}} = \sqrt{x^2 + k} / \sqrt{k} \text{ និង } dx = \sqrt{k} \frac{dt}{\cos^2 t} \text{ ។}$$

$$\begin{aligned} \text{នាំឱ្យ } \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + k}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{k \tan^2 t + k}} \cdot \frac{\sqrt{k} dt}{\cos^2 t} \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{k} (1/\cos t)} \cdot \frac{\sqrt{k} dt}{\cos^2 t} = \int \frac{\cos t dt}{1 - \sin^2 t} (*) \text{ ។} \end{aligned}$$

បន្ទាប់មក យើងតាង $u = \sin t$ នាំឱ្យ $du = \cos t dt$ និងពីសមីការ (*) ទៅជា៖

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + k}} dx &= \int \frac{\cos t dt}{1 - \sin^2 t} = \int \frac{du}{1 - u^2} \\ &= \int \frac{(1+u) + (1-u)}{2(1-u)(1+u)} du = \int \left(\frac{1}{2(1-u)} + \frac{1}{2(1+u)} \right) du \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin t}{1 - \sin t} \right| + c = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1/\cos t + \tan t}{1/\cos t - \tan t} \right| + c \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2 + k} / \sqrt{k} + x / \sqrt{k}}{\sqrt{x^2 + k} / \sqrt{k} - x / \sqrt{k}} \right| + c = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2 + k} + x}{\sqrt{x^2 + k} - x} \right| + c \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(\sqrt{x^2 + k} + x)^2}{x^2 + k - x^2} \right| + c = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + k} \right| + c_1 \end{aligned}$$

ដែល c, c_1 ជាចំនួនពិតថេរ។

របៀបទី២ យើងតាង $t = x + \sqrt{x^2 + k}$ នាំឱ្យ

$$dt = \left(x + \sqrt{x^2 + k} \right)' dx = \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + k}} \right) dx$$

$$= \left(\frac{x + \sqrt{x^2 + k}}{\sqrt{x^2 + k}} \right) dx = \frac{t}{\sqrt{x^2 + k}} dx$$

និង $\frac{1}{\sqrt{x^2 + k}} dx = \frac{dt}{t}$ ។

នាំឱ្យ $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + k}} dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + k} \right| + c$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ដូចនេះ យើងបានរូបមន្ត $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + k}} dx = \boxed{\ln \left| x + \sqrt{x^2 + k} \right| + c}$ (3.5) ។

ឧទាហរណ៍ទី៥ គណនា $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}} dx$ និង $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{16 + 9x^2}} dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (3.5) យើងបាន៖

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + 2} \right| + c = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 2} \right) + c$$

និង $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{16 + 9x^2}} dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{9\left(\frac{16}{9} + x^2\right)}} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{16}{9}}} dx$

$$= \frac{1}{3} \ln \left| x + \sqrt{x^2 + \frac{16}{9}} \right| \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{3} \ln \left| 1 + \sqrt{1 + \frac{16}{9}} \right| - \frac{1}{3} \ln \left| 0 + \sqrt{0 + \frac{16}{9}} \right|$$

$$= \frac{1}{3} \ln 2 \approx 0.2310 \text{ ។}$$

៣.៦ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អសនិទាន៣១ $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - k}} dx$

អាំងតេក្រាល $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - k}} dx$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $\frac{1}{\sqrt{x^2 - k}}$ ជាអនុគមន៍អសនិទាន។

ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាល $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - k}} dx$ យើងអាចតាង $x = \sqrt{k} \sec t = \frac{\sqrt{k}}{\cos t}$

($k > 0$) ឬ $t = x + \sqrt{x^2 - k}$ ។

របៀបទី១ យើងតាង $x = \sqrt{k} \sec t = \frac{\sqrt{k}}{\cos t}$ ($k > 0$) នាំឱ្យ $\frac{1}{\cos t} = \frac{x}{\sqrt{k}}$,

$t = \arccos \frac{\sqrt{k}}{x} = \cos^{-1} \frac{\sqrt{k}}{x}$, $\tan t = \frac{\sqrt{x^2 - k}}{\sqrt{k}}$ និង $dx = \frac{\sqrt{k} \sin t dt}{\cos^2 t}$ ។

$$\begin{aligned} \text{នាំឱ្យ } \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - k}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{k} \tan t} \cdot \frac{\sqrt{k} \sin t dt}{\cos^2 t} = \int \frac{dt}{\cos t} \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin t}{1 - \sin t} \right| + c = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1/\cos t + \tan t}{1/\cos t - \tan t} \right| + c \quad (\text{តាមផ្នែក ៣.៥}) \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x/\sqrt{k} + \sqrt{x^2 - k}/\sqrt{k}}{x/\sqrt{k} - \sqrt{x^2 - k}/\sqrt{k}} \right| + c = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2 - k}}{x - \sqrt{x^2 - k}} \right| + c \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(x + \sqrt{x^2 - k})^2}{x^2 - x^2 + k} \right| + c = \ln |x + \sqrt{x^2 - k}| + c_1 \end{aligned}$$

ដែល c, c_1 ជាចំនួនពិតថេរ។

របៀបទី២ យើងតាង $t = x + \sqrt{x^2 - k}$ នាំឱ្យ

$$dt = \left(x + \sqrt{x^2 - k} \right)' dx = \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - k}} \right) dx = \left(\frac{x + \sqrt{x^2 - k}}{\sqrt{x^2 - k}} \right) dx = \frac{t}{\sqrt{x^2 - k}} dx$$

និង $\frac{1}{\sqrt{x^2 - k}} dx = \frac{dt}{t}$ ។

$$\text{នាំឱ្យ } \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - k}} dx = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + c = \ln |x + \sqrt{x^2 - k}| + c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ដូចនេះ យើងបានរូបមន្ត $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - k}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - k} \right| + c$ (3.6) ។

ឧទាហរណ៍ទី៦ គណនា $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 5}} dx$ និង $\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{9x^2 - 16}} dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (3.6) យើងបាន៖

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 5}} dx &= \ln \left| x + \sqrt{x^2 - 5} \right| + c \\ \text{និង} \quad \int_2^4 \frac{1}{\sqrt{9x^2 - 16}} dx &= \int_2^4 \frac{1}{\sqrt{9(x^2 - \frac{16}{9})}} dx = \frac{1}{3} \int_2^4 \frac{1}{\sqrt{x^2 - \frac{16}{9}}} dx \\ &= \frac{1}{3} \ln \left| x + \sqrt{x^2 - \frac{16}{9}} \right| \Big|_2^4 \\ &= \frac{1}{3} \ln \left| 4 + \sqrt{4^2 - \frac{16}{9}} \right| - \frac{1}{3} \ln \left| 2 + \sqrt{2^2 - \frac{16}{9}} \right| \\ &= \frac{1}{3} \ln \left(\frac{6 + 4\sqrt{2}}{3 + \sqrt{5}} \right) \approx 0.2667 \quad \text{។} \end{aligned}$$

៣.៧ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អសនិទានរាង $\int \sqrt{k - x^2} dx$

អាំងតេក្រាល $\int \sqrt{k - x^2} dx$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេ

ក្រាល $\sqrt{k - x^2}$ ជាអនុគមន៍អសនិទាន។

ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាល $\int \sqrt{k - x^2} dx$ យើងអាចតាង $x = \sqrt{k} \sin t$ ($k > 0$)

ឬ $x = \sqrt{k} \cos t$ ($k > 0$) ឬក៏យើងអាចប្រើវិធីអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក។

របៀបទី១ យើងតាង $x = \sqrt{k} \sin t$ ($k > 0$) នាំឱ្យ

$$\sin t = \frac{x}{\sqrt{k}}, \quad t = \arcsin \frac{x}{\sqrt{k}} = \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{k}} \quad \text{និង} \quad dx = \sqrt{k} \cos t dt \quad \text{។}$$

$$\text{នាំឱ្យ} \quad \int \sqrt{k - x^2} dx = \int \sqrt{k - k \sin^2 t} \cdot \sqrt{k} \cos t dt = k \int \cos^2 t dt$$

$$\begin{aligned}
&= k \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{k}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) + c \\
&= \frac{k}{2} \left(t + \frac{1}{2} 2 \sin t \cos t \right) + c = \frac{k}{2} \left(t + \sin t \sqrt{1 - \sin^2 t} \right) + c \\
&= \frac{k}{2} \left(\sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{k}} + \frac{x}{\sqrt{k}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{k}} \right) + c \\
&= \frac{k}{2} \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{k}} + \frac{1}{2} x \sqrt{k - x^2} + c
\end{aligned}$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

របៀបទី២ យើងប្រើវិធីអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក។

យើងមាន $\int \sqrt{k - x^2} dx = \int \frac{k - x^2}{\sqrt{k - x^2}} dx = k \int \frac{dx}{\sqrt{k - x^2}} - \int \frac{x^2}{\sqrt{k - x^2}} dx \quad (*)$ ។

យើងយក $u = x$ នាំឱ្យ $du = dx$

និង $dv = \frac{x}{\sqrt{k - x^2}} dx$ នាំឱ្យ $v = \int dv = \int \frac{x}{\sqrt{k - x^2}} dx = -\frac{1}{2} \int (k - x^2)^{-\frac{1}{2}} d(k - x^2)$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{(k - x^2)^{\frac{1}{2}}}{(1/2)} = -\sqrt{k - x^2} \quad ។$$

នាំឱ្យ $\int \frac{x^2}{\sqrt{k - x^2}} dx = \int u dv = uv - \int v du$

$$= -x\sqrt{k - x^2} + \int \sqrt{k - x^2} dx$$

និងតាមសមីការ $(*)$ នាំឱ្យ

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{k - x^2} dx &= k \int \frac{dx}{\sqrt{k - x^2}} + x\sqrt{k - x^2} - \int \sqrt{k - x^2} dx \\
\Leftrightarrow 2 \int \sqrt{k - x^2} dx &= k \int \frac{dx}{\sqrt{k - x^2}} + x\sqrt{k - x^2} \\
\Rightarrow \int \sqrt{k - x^2} dx &= \frac{k}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{k - x^2}} + \frac{1}{2} x\sqrt{k - x^2}
\end{aligned}$$

$$= \frac{k}{2} \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{k}} + \frac{1}{2} x \sqrt{k - x^2} + c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

$$\text{ដូចនេះ យើងបានរូបមន្ត } \int \sqrt{k - x^2} dx = \boxed{\frac{1}{2} x \sqrt{k - x^2} + \frac{k}{2} \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{k}} + c} \quad (3.7) \quad \text{។}$$

ឧទាហរណ៍ទី៧ គណនា $\int \sqrt{5 - x^2} dx$ និង $\int_0^1 \sqrt{16 - 9x^2} dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (3.7) យើងបាន៖

$$\int \sqrt{5 - x^2} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{5 - x^2} + \frac{5}{2} \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{5}} + c$$

$$\text{និង } \int_0^1 \sqrt{16 - 9x^2} dx = \int_0^1 \sqrt{9\left(\frac{16}{9} - x^2\right)} dx = 3 \int_0^1 \sqrt{\frac{16}{9} - x^2} dx$$

$$= \frac{3}{2} x \sqrt{\frac{16}{9} - x^2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{16}{9} \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{\frac{16}{9}}} \bigg|_0^1$$

$$= \frac{3}{2} x \sqrt{\frac{16}{9} - x^2} + \frac{8}{3} \sin^{-1} \frac{3x}{4} \bigg|_0^1$$

$$= \frac{3}{2} \sqrt{\frac{16}{9} - 1} + \frac{8}{3} \left(\sin^{-1} \frac{3}{4} - \sin^{-1} 0 \right)$$

$$= \frac{\sqrt{7}}{2} + \frac{8}{3} \sin^{-1} \frac{3}{4} \approx 3.5843 \quad \text{។}$$

៣.៨ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អសនិទាន៣ $\int \sqrt{x^2 + k} dx$

អាំងតេក្រាល $\int \sqrt{x^2 + k} dx$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេ

ក្រាល $\sqrt{x^2 + k}$ ជាអនុគមន៍អសនិទាន។

ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាល $\int \sqrt{x^2 + k} \, dx$ យើងអាចតាង $x = \sqrt{k} \tan t$ ($k > 0$)

ឬក៏យើងអាចប្រើវិធីអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក។

ឥឡូវនេះ យើងប្រើវិធីអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក។

$$\text{យើងមាន } \int \sqrt{x^2 + k} \, dx = \int \frac{x^2 + k}{\sqrt{x^2 + k}} \, dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + k}} \, dx + k \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}} \quad (*) \text{ ។}$$

យើងយក $u = x$ នាំឱ្យ $du = dx$

$$\begin{aligned} \text{និង } dv &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + k}} \, dx \text{ នាំឱ្យ } v = \int dv = \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + k}} \, dx = \frac{1}{2} \int (x^2 + k)^{-\frac{1}{2}} d(x^2 + k) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2 + k)^{\frac{1}{2}}}{(1/2)} = \sqrt{x^2 + k} \text{ ។} \end{aligned}$$

$$\text{នាំឱ្យ } \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + k}} \, dx = x\sqrt{x^2 + k} - \int \sqrt{x^2 + k} \, dx$$

និងតាមសមីការ (*) នាំឱ្យ

$$\int \sqrt{x^2 + k} \, dx = x\sqrt{x^2 + k} - \int \sqrt{x^2 + k} \, dx + k \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}}$$

$$\Leftrightarrow 2 \int \sqrt{x^2 + k} \, dx = x\sqrt{x^2 + k} + k \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int \sqrt{x^2 + k} \, dx &= \frac{1}{2} x\sqrt{x^2 + k} + \frac{k}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}} \\ &= \frac{1}{2} x\sqrt{x^2 + k} + \frac{k}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 + k}| + c \end{aligned}$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

$$\text{ដូចនេះ យើងបានរូបមន្ត } \int \sqrt{x^2 + k} \, dx = \boxed{\frac{1}{2} x\sqrt{x^2 + k} + \frac{k}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 + k}| + c} \quad (3.8) \text{ ។}$$

ឧទាហរណ៍ទី៨ គណនា $\int \sqrt{x^2 + 5} \, dx$ និង $\int_0^1 \sqrt{16 + 9x^2} \, dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (3.8) យើងបាន៖

ផ្នែកគណិតវិទ្យានិងស្ថិតិ

$$\int \sqrt{x^2 + 5} \, dx = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + 5} + \frac{5}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 + 5} \right| + c$$

និង
$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{16 + 9x^2} \, dx &= \int_0^1 \sqrt{9\left(\frac{16}{9} + x^2\right)} \, dx = 3 \int_0^1 \sqrt{x^2 + \frac{16}{9}} \, dx \\ &= \frac{3}{2} x \sqrt{x^2 + \frac{16}{9}} + \frac{3}{2} \cdot \frac{16}{9} \ln \left| x + \sqrt{x^2 + \frac{16}{9}} \right| \Bigg|_0^1 \\ &= \frac{3}{2} \sqrt{1 + \frac{16}{9}} + \frac{8}{3} \ln \left| 1 + \sqrt{1 + \frac{16}{9}} \right| - \frac{8}{3} \ln \left| 0 + \sqrt{0 + \frac{16}{9}} \right| \\ &= \frac{5}{2} + \frac{8}{3} \ln \frac{8}{3} - \frac{8}{3} \ln \frac{4}{3} = \frac{5}{2} + \frac{8}{3} \ln 2 \approx 4.3483 \quad \text{។} \end{aligned}$$

៣.៩ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អសនិទានរាង $\int \sqrt{x^2 - k} \, dx$

អាំងតេក្រាល $\int \sqrt{x^2 - k} \, dx$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $\sqrt{x^2 - k}$ ជាអនុគមន៍អសនិទាន។

ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាល $\int \sqrt{x^2 - k} \, dx$ យើងអាចតាង $x = \sqrt{k} \sec t = \frac{\sqrt{k}}{\cos t}$

($k > 0$) ឬក៏យើងអាចប្រើវិធីអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក។

ឥឡូវនេះ យើងប្រើវិធីអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក។

យើងមាន
$$\int \sqrt{x^2 - k} \, dx = \int \frac{x^2 - k}{\sqrt{x^2 - k}} \, dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - k}} \, dx - k \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - k}} \quad (*) \quad \text{។}$$

យើងយក $u = x$ នាំឱ្យ $du = dx$

និង
$$\begin{aligned} dv &= \frac{x}{\sqrt{x^2 - k}} \, dx \quad \text{នាំឱ្យ} \quad v = \int dv = \int \frac{x}{\sqrt{x^2 - k}} \, dx = \frac{1}{2} \int (x^2 - k)^{-\frac{1}{2}} d(x^2 - k) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2 - k)^{\frac{1}{2}}}{(1/2)} = \sqrt{x^2 - k} \quad \text{។} \end{aligned}$$

នាំឱ្យ
$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - k}} \, dx = x \sqrt{x^2 - k} - \int \sqrt{x^2 - k} \, dx$$

និងតាមសមីការ (*) នាំឱ្យ

$$\int \sqrt{x^2 - k} \, dx = x\sqrt{x^2 - k} - \int \sqrt{x^2 - k} \, dx - k \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - k}}$$

$$\Leftrightarrow 2 \int \sqrt{x^2 - k} \, dx = x\sqrt{x^2 - k} - k \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - k}}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int \sqrt{x^2 - k} \, dx &= \frac{1}{2} x\sqrt{x^2 - k} - \frac{k}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - k}} \\ &= \frac{1}{2} x\sqrt{x^2 - k} - \frac{k}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 - k}| + c \end{aligned}$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

$$\text{ដូចនេះ យើងបានរូបមន្ត } \int \sqrt{x^2 - k} \, dx = \boxed{\frac{1}{2} x\sqrt{x^2 - k} - \frac{k}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 - k}| + c} \quad (3.9) \quad \text{។}$$

ឧទាហរណ៍ទី៩ គណនា $\int \sqrt{x^2 - 5} \, dx$ និង $\int_2^4 \sqrt{9x^2 - 16} \, dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (3.9) យើងបាន៖

$$\int \sqrt{x^2 - 5} \, dx = \frac{1}{2} x\sqrt{x^2 - 5} - \frac{5}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 - 5}| + c$$

$$\text{និង} \quad \int_2^4 \sqrt{9x^2 - 16} \, dx = \int_2^4 \sqrt{9\left(x^2 - \frac{16}{9}\right)} \, dx = 3 \int_2^4 \sqrt{x^2 - \frac{16}{9}} \, dx$$

$$= \frac{3}{2} x\sqrt{x^2 - \frac{16}{9}} - \frac{3}{2} \cdot \frac{16}{9} \ln\left|x + \sqrt{x^2 - \frac{16}{9}}\right| \Big|_2^4$$

$$= \frac{3}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{4^2 - \frac{16}{9}} - \frac{8}{3} \ln\left|4 + \sqrt{4^2 - \frac{16}{9}}\right| - \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{2^2 - \frac{16}{9}} + \frac{8}{3} \ln\left|2 + \sqrt{2^2 - \frac{16}{9}}\right|$$

$$= 16\sqrt{2} - 2\sqrt{5} + \frac{8}{3} \ln \frac{3 + \sqrt{5}}{6 + 4\sqrt{2}} \approx 16.0210 \quad \text{។}$$

៣.១០ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អសនិទាន៣ $\int (\alpha x + \beta) \sqrt{ax+b} dx$

អាំងតេក្រាល $\int (\alpha x + \beta) \sqrt{ax+b} dx$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមាន

អនុគមន៍អាំងតេក្រាល $(\alpha x + \beta) \sqrt{ax+b}$ ជាអនុគមន៍អសនិទាន។

ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាល $\int (\alpha x + \beta) \sqrt{ax+b} dx$ យើងតាង $t = \sqrt{ax+b}$

($a \neq 0$) នាំឱ្យ $t^2 = ax+b$, $x = \frac{t^2-b}{a}$ និង $2t dt = a dx \Leftrightarrow dx = \frac{2}{a} t dt$ ។

$$\begin{aligned} \text{នាំឱ្យ } \int (\alpha x + \beta) \sqrt{ax+b} dx &= \int \left[\alpha \left(\frac{t^2-b}{a} \right) + \beta \right] t \cdot \frac{2}{a} t dt \\ &= \frac{2}{a^2} \left[\alpha \frac{t^5}{5} + (a\beta - \alpha b) \frac{t^3}{3} \right] + c \\ &= \frac{2\alpha}{5a^2} t^5 + \frac{2(a\beta - \alpha b)}{3a^2} t^3 + c \\ &= \boxed{\frac{2\alpha}{5a^2} \sqrt{(ax+b)^5} + \frac{2(a\beta - \alpha b)}{3a^2} \sqrt{(ax+b)^3} + c} \quad (3.10) \end{aligned}$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ឧទាហរណ៍ទី១០ គណនា $\int (6x+5) \sqrt{3x+4} dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (3.10) យើងបាន៖

$$\begin{aligned} \int (6x+5) \sqrt{3x+4} dx &= \frac{2 \cdot 6}{5 \cdot 3^2} \sqrt{(3x+4)^5} + \frac{2(3 \cdot 5 - 6 \cdot 4)}{3 \cdot 3^2} \sqrt{(3x+4)^3} + c \\ &= \frac{4}{15} \sqrt{(3x+4)^5} - \frac{2}{3} \sqrt{(3x+4)^3} + c \quad \text{។} \end{aligned}$$

៣.១១ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អសនិទាន៣ $\int \frac{dx}{(\alpha x + \beta) \sqrt{ax+b}}$

អាំងតេក្រាល $\int \frac{dx}{(\alpha x + \beta) \sqrt{ax+b}}$ ($a \neq 0$, $\alpha \neq 0$) ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់

ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $\frac{1}{(\alpha x + \beta)\sqrt{ax+b}}$ ជាអនុគមន៍អសនិទាន។

ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាល $\int \frac{dx}{(\alpha x + \beta)\sqrt{ax+b}}$ យើងតាង $t = \sqrt{ax+b}$ នាំឱ្យ

$$t^2 = ax+b, \quad x = \frac{t^2-b}{a} \quad \text{និង} \quad 2t dt = a dx \Leftrightarrow dx = \frac{2}{a} t dt \quad \text{។}$$

$$\text{នាំឱ្យ} \quad \int \frac{dx}{(\alpha x + \beta)\sqrt{ax+b}} = \int \frac{\frac{2t dt}{a}}{(\alpha(\frac{t^2-b}{a}) + \beta)t} = \frac{2}{a} \int \frac{dt}{\alpha t^2 - \alpha b + a\beta}$$

- បើ $k=0$ នោះពីសមីការ (*) នាំឱ្យ

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(\alpha x + \beta)\sqrt{ax+b}} &= \frac{2}{\alpha} \int \frac{dt}{t^2} = \frac{2}{\alpha} \int t^{-2} dt \\ &= \frac{2}{\alpha} \frac{t^{-1}}{(-1)} + c = -\frac{2}{\alpha t} + c = \boxed{-\frac{2}{\alpha \sqrt{ax+b}} + c} \quad (3.11) \end{aligned}$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- បើ $k > 0$ នោះពីសមីការ (*) និងតាមផ្នែក ១.២.៣ នាំឱ្យ

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(\alpha x + \beta)\sqrt{ax+b}} &= \frac{2}{\alpha} \int \frac{dt}{t^2 + (\sqrt{k})^2} = \frac{2}{\alpha} \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} \tan^{-1}\left(\frac{t}{\sqrt{k}}\right) + c \\ &= \boxed{\frac{2}{\alpha \sqrt{k}} \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{ax+b}}{\sqrt{k}}\right) + c} \quad (3.12) \end{aligned}$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- បើ $k < 0$ នោះពីសមីការ (*) និងតាមផ្នែក ១.២.៣ នាំឱ្យ

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(\alpha x + \beta)\sqrt{ax+b}} &= \frac{2}{\alpha} \int \frac{dt}{t^2 - (\sqrt{-k})^2} = \frac{2}{\alpha} \cdot \frac{1}{2\sqrt{-k}} \ln \left| \frac{t - \sqrt{-k}}{t + \sqrt{-k}} \right| + c \\ &= \boxed{\frac{1}{\alpha \sqrt{-k}} \ln \left| \frac{\sqrt{ax+b} - \sqrt{-k}}{\sqrt{ax+b} + \sqrt{-k}} \right| + c} \quad (3.13) \end{aligned}$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ឧទាហរណ៍ទី១១ គណនា $\int \frac{dx}{(2x+3)\sqrt{2x+3}}$, $\int \frac{dx}{(2x+5)\sqrt{4x+3}}$ និង $\int \frac{dx}{(4x+3)\sqrt{2x+5}}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ចំពោះអាំងតេក្រាល $\int \frac{dx}{(2x+3)\sqrt{2x+3}}$ មាន $k = \frac{a\beta - \alpha b}{\alpha} = \frac{2(3) - 2(3)}{2} = 0$ ។

នោះតាមរូបមន្ត (3.11) យើងបាន៖

$$\int \frac{dx}{(2x+3)\sqrt{2x+3}} = -\frac{2}{2\sqrt{2x+3}} + c = -\frac{1}{\sqrt{2x+3}} + c$$

ចំពោះអាំងតេក្រាល $\int \frac{dx}{(2x+5)\sqrt{4x+3}}$ មាន $k = \frac{a\beta - \alpha b}{\alpha} = \frac{4(5) - 2(3)}{2} = 7 > 0$ ។

នោះតាមរូបមន្ត (3.12) យើងបាន៖

$$\int \frac{dx}{(2x+5)\sqrt{4x+3}} = \frac{2}{2\sqrt{7}} \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{4x+3}}{\sqrt{7}} \right) + c = \frac{1}{\sqrt{7}} \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{4x+3}}{\sqrt{7}} \right) + c$$

និងចំពោះអាំងតេក្រាល $\int \frac{dx}{(4x+3)\sqrt{2x+5}}$ មាន

$$k = \frac{a\beta - \alpha b}{\alpha} = \frac{2(3) - 4(5)}{4} = -3.5 < 0$$
 ។

នោះតាមរូបមន្ត (3.13) យើងបាន៖

$$\int \frac{dx}{(4x+3)\sqrt{2x+5}} = \frac{1}{4\sqrt{3.5}} \ln \left| \frac{\sqrt{2x+5} - \sqrt{3.5}}{\sqrt{2x+5} + \sqrt{3.5}} \right| + c$$
 ។

៣.១២ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អសនិទាន $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$

អាំងតេក្រាល $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ ($a \neq 0$) ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមាន

អនុគមន៍អាំងតេក្រាល $\frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ ជាអនុគមន៍អសនិទាន។ អនុគមន៍នេះមានត្រីជា

$$ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$
 ។

យើងនឹងសិក្សាតាម $\Delta = b^2 - 4ac$ ដើម្បីស្វែងរកឫសនៃត្រីធានេះ។

១. ករណី $\Delta = 0$ នោះត្រីធានាមានឫសឌុបគឺ $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ ។

នាំឱ្យ $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$, $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a} \left|x + \frac{b}{2a}\right|$ ($a > 0$) និង

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dx}{\left(x + \frac{b}{2a}\right)} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left|x + \frac{b}{2a}\right| + c_1 \\ &= \boxed{\frac{1}{\sqrt{a}} \ln |2ax + b| + c_2} \quad (3.14) \end{aligned}$$

ដែល c_1, c_2 ជាចំនួនថេរ និង $a > 0$ ។

២. ករណី $\Delta > 0$ នោះត្រីធានាមានឫសពីរផ្សេងគ្នាគឺ $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ ឬ

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ។}$$

$$\begin{aligned} \text{នាំឱ្យ } ax^2 + bx + c &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right] = a \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] \\ &= a(x - x_1)(x - x_2) \end{aligned}$$

និងយើងតាង $t = x + \frac{b}{2a}$ នាំឱ្យ $dx = dt$ ។

- ប្រសិនបើ $a > 0$ នាំឱ្យ

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| x + \frac{b}{2a} + \sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}} \right| + c_1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| x + \frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{ax^2 + bx + c}{a}} \right| + c_1 \end{aligned}$$

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| 2ax + b + 2\sqrt{a(ax^2 + bx + c)} \right| + c_2 \right] \quad (3.15)$$

ដែល c_1, c_2 ជាចំនួនថេរ និង $a > 0$ ។

- ប្រសិនបើ $a < 0$ នាំឱ្យ

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} &= \frac{1}{\sqrt{-a}} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2} - \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}} \\ &= \left[\frac{1}{\sqrt{-a}} \sin^{-1} \left(\frac{2ax + b}{\sqrt{\Delta}} \right) + c_1 \right] \quad (3.16) \end{aligned}$$

ដែល $|2ax + b| < \sqrt{\Delta}$, c_1 ជាចំនួនថេរ និង $a < 0$ ។

៣. ប្រសិនបើ $\Delta < 0$ នោះត្រីធាត្យានឫសចំនួនពិតទេ។ នាំឱ្យត្រីធាត្យានសរសេរជា

$$ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right] = a \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

និងយើងតាង $t = x + \frac{b}{2a}$ នាំឱ្យ $dx = dt$ ។

- ប្រសិនបើ $a > 0$ នាំឱ្យ

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| x + \frac{b}{2a} + \sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}} \right| + c_1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| x + \frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{ax^2 + bx + c}{a}} \right| + c_1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| 2ax + b + 2\sqrt{a(ax^2 + bx + c)} \right| + c_2 \end{aligned}$$

(ដូចគ្នានឹងរូបមន្ត (3.15))

ដែល c_1, c_2 ជាចំនួនថេរ និង $a > 0$ ។

- ប្រសិនបើ $a < 0$ នាំឱ្យ $ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] < 0$ នោះយើង

មិនអាចគណនា អាំងតេក្រាលប្រភេទនេះបានទេ។

ឧទាហរណ៍ទី១២ គណនា $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 4x + 1}}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 4x + 3}}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 4x - 8}}$
និង $\int \frac{dx}{\sqrt{-4x^2 - 4x + 4}}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ចំពោះអាំងតេក្រាល $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 4x + 1}}$ មាន $\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4(4)(1) = 0$ ។

នោះតាមរូបមន្ត (3.14) យើងបាន៖

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 4x + 1}} = \frac{1}{\sqrt{4}} \ln |2 \cdot 4x + 4| + c_2 = \frac{1}{2} \ln |8x + 4| + c_2 \quad \text{។}$$

ចំពោះអាំងតេក្រាល $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 4x + 3}}$ មាន $a = 4 > 0$, $\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4(4)(3) = -32 < 0$ ។

នោះតាមរូបមន្ត (3.15) យើងបាន៖

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 4x + 3}} &= \frac{1}{\sqrt{4}} \ln \left| 2 \cdot 4x + 4 + 2\sqrt{4(4x^2 + 4x + 3)} \right| + c_2 \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| 8x + 4 + 4\sqrt{4x^2 + 4x + 3} \right| + c_2 \quad \text{។} \end{aligned}$$

ចំពោះអាំងតេក្រាល $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 4x - 8}}$ មាន $a = 4 > 0$, $\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4(4)(-8) = 144 > 0$ ។

នោះតាមរូបមន្ត (3.15) យើងបាន៖

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 4x - 8}} = \frac{1}{\sqrt{4}} \ln \left| 2 \cdot 4x + 4 + 2\sqrt{4(4x^2 + 4x - 8)} \right| + c_2$$

ចំពោះអាំងតេក្រាល $\int \frac{dx}{\sqrt{-4x^2 - 4x + 4}}$ មាន $a = -4 < 0$, $\Delta = (-4)^2 - 4(-4)(4) = 80 > 0$ ។

នោះតាមរូបមន្ត (3.16) យើងបាន៖

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-4x^2 - 4x + 4}} = \frac{1}{\sqrt{-(-4)}} \sin^{-1} \left(\frac{2(-4)x + (-4)}{\sqrt{80}} \right) + c_1$$

៣.១៣ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អសនិទាន $\int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx$

អាំងតេក្រាល $\int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx$ ($a \neq 0$) ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ ជាអនុគមន៍អសនិទាន។ អនុគមន៍នេះមានត្រីធា $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) ។

យើងនឹងសិក្សាតាម $\Delta = b^2 - 4ac$ ដើម្បីស្វែងរកប្រភេទនៃត្រីធានេះ។

១. ករណី $\Delta = 0$ នោះត្រីធាមានប្រសិទ្ធភាពគឺ $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ ។

នាំឱ្យ $ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$, $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a} \left| x + \frac{b}{2a} \right|$ ($a > 0$) និង

$$\begin{aligned} \int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx &= \sqrt{a} \int \left(x + \frac{b}{2a} \right) dx = \sqrt{a} \left(\frac{1}{2} x^2 + \frac{b}{2a} x \right) + c_1 \\ &= \boxed{\frac{\sqrt{a}}{2} x^2 + \frac{b\sqrt{a}}{2a} x + c_1} \quad (3.17) \end{aligned}$$

ដែល c_1 ជាចំនួនថេរ និង $a > 0$ ។

២. ករណី $\Delta > 0$ នោះត្រីធាមានប្រសិទ្ធភាពពីរផ្សេងគ្នាគឺ $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ ឬ $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ ។

នាំឱ្យ $ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$

$$= a(x - x_1)(x - x_2)$$

និងយើងតាង $t = x + \frac{b}{2a}$ នាំឱ្យ $dx = dt$ ។

- ប្រសិនបើ $a > 0$ នាំឱ្យ

$$\begin{aligned} \int \sqrt{ax^2 + bx + c} \, dx &= \sqrt{a} \int \sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}} \, dx = \sqrt{a} \int \sqrt{t^2 - \frac{\Delta}{4a^2}} \, dt \\ &= \frac{\sqrt{a}}{2} \left(x + \frac{b}{2a}\right) \sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}} - \frac{\sqrt{a}}{2} \cdot \frac{\Delta}{4a^2} \ln \left| x + \frac{b}{2a} + \sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}} \right| + c_1 \\ &= \frac{\sqrt{a}}{2} \left(x + \frac{b}{2a}\right) \sqrt{\frac{ax^2 + bx + c}{a}} - \frac{\Delta\sqrt{a}}{8a^2} \ln \left| x + \frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{ax^2 + bx + c}{a}} \right| + c_1 \\ &= \boxed{\frac{(2ax+b)\sqrt{a}}{4a^2} \sqrt{a(ax^2 + bx + c)} - \frac{\Delta\sqrt{a}}{8a^2} \ln \left| 2ax + b + 2\sqrt{a(ax^2 + bx + c)} \right| + c_2} \quad (3.18) \end{aligned}$$

ដែល c_1, c_2 ជាចំនួនថេរ និង $a > 0$ ។

- ប្រសិនបើ $a < 0$ នាំឱ្យ

$$\begin{aligned} \int \sqrt{ax^2 + bx + c} \, dx &= \sqrt{-a} \int \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2} - \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} \, dx \\ &= \frac{\sqrt{-a}}{2} t \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2} - t^2} + \frac{\sqrt{-a}}{2} \cdot \frac{\Delta}{4a^2} \sin^{-1} \left(\frac{t}{\sqrt{\Delta}/2a} \right) + c_1 \quad (\text{តាម (3.7)}) \\ &= \frac{\sqrt{-a}}{2} \left(x + \frac{b}{2a}\right) \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2} - \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} + \frac{\Delta\sqrt{-a}}{8a^2} \sin^{-1} \left(\frac{x + \frac{b}{2a}}{\sqrt{\Delta}/2a} \right) + c_1 \\ &= \frac{(2ax+b)\sqrt{-a}}{4a} \sqrt{\frac{ax^2 + bx + c}{-a}} + \frac{\Delta\sqrt{-a}}{8a^2} \sin^{-1} \left(\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}} \right) + c_1 \\ &= \boxed{\frac{(2ax+b)\sqrt{-a}}{4a^2} \sqrt{-a(ax^2 + bx + c)} + \frac{\Delta\sqrt{-a}}{8a^2} \sin^{-1} \left(\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}} \right) + c_1} \quad (3.19) \end{aligned}$$

ដែល $|2ax+b| < \sqrt{\Delta}$, c_1 ជាចំនួនថេរ និង $a < 0$ ។

៣. ប្រសិនបើ $\Delta < 0$ នោះត្រីកោណប្រសព្វចំនួនពិតទេ។ នាំឱ្យត្រីកោណចសរសេរជា

$$a x^2 + b x + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right] = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

និងយើងតាង $t = x + \frac{b}{2a}$ នាំឱ្យ $dx = dt$ ។

- ប្រសិនបើ $a > 0$ នាំឱ្យ

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a x^2 + b x + c} \, dx &= \sqrt{a} \int \sqrt{\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}} \, dx \\ &= \frac{\sqrt{a}}{2} t \sqrt{t^2 - \frac{\Delta}{4a^2}} + \frac{\sqrt{a}}{2} \cdot \left(-\frac{\Delta}{4a^2} \right) \ln \left| t + \sqrt{t^2 - \frac{\Delta}{4a^2}} \right| + c_1 \quad (\text{តាម (3.8)}) \\ &= \frac{\sqrt{a}}{2} \left(x + \frac{b}{2a} \right) \sqrt{\frac{a x^2 + b x + c}{a}} - \frac{\Delta \sqrt{a}}{8a^2} \ln \left| x + \frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{a x^2 + b x + c}{a}} \right| + c_1 \\ &= \frac{(2a x + b) \sqrt{a}}{4a^2} \sqrt{a(a x^2 + b x + c)} - \frac{\Delta \sqrt{a}}{8a^2} \ln \left| 2a x + b + 2\sqrt{a(a x^2 + b x + c)} \right| + c_2 \end{aligned}$$

ដែល c_1, c_2 ជាចំនួនថេរ និង $a > 0$ (ដូចគ្នានឹងរូបមន្ត (3.18)) ។

- ប្រសិនបើ $a < 0$ នាំឱ្យ $a x^2 + b x + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] < 0$ នោះយើង

មិនអាចគណនាអាំងតេក្រាលប្រភេទនេះបានទេ។

ឧទាហរណ៍ទី១៣ គណនា $\int \sqrt{4x^2 + 4x + 1} \, dx$, $\int \sqrt{4x^2 + 4x + 3} \, dx$, $\int \sqrt{4x^2 + 4x - 8} \, dx$

និង $\int \sqrt{-4x^2 - 4x + 4} \, dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

ចំពោះអាំងតេក្រាល $\int \sqrt{4x^2 + 4x + 1} \, dx$ មាន $\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4(4)(1) = 0$ ។

នោះតាមរូបមន្ត (3.17) យើងបាន៖

$$\int \sqrt{4x^2 + 4x + 1} \, dx = \frac{\sqrt{4}}{2} x^2 + \frac{4\sqrt{4}}{2 \cdot 4} x + c_1 = x^2 + x + c_1 \quad \text{។}$$

ចំពោះអាំងតេក្រាល $\int \sqrt{4x^2 + 4x + 3} \, dx$ មាន $a = 4 > 0$, $\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4(4)(3)$

$$= -32 < 0 \quad \text{។}$$

នោះតាមរូបមន្ត (3.18) យើងបាន៖

$$\begin{aligned}\int \sqrt{4x^2 + 4x + 3} \, dx &= \frac{(2 \cdot 4x + 4)\sqrt{4}}{4 \cdot 4^2} \sqrt{4(4x^2 + 4x + 3)} \\ &\quad - \frac{\Delta\sqrt{4}}{8 \cdot 4^2} \ln \left| 2 \cdot 4x + 4 + 2\sqrt{4(4x^2 + 4x + 3)} \right| + c_2 \\ &= \frac{(8x + 4)}{16} \sqrt{4x^2 + 4x + 3} + \frac{1}{2} \ln \left| 8x + 4 + 4\sqrt{4x^2 + 4x + 3} \right| + c_2 \quad \text{។}\end{aligned}$$

ចំពោះអាំងតេក្រាល $\int \sqrt{4x^2 + 4x - 8} \, dx$ មាន $a = 4 > 0$, $\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4(4)(-8)$
 $= 144 > 0$ ។

នោះតាមរូបមន្ត (3.18) យើងបាន៖

$$\begin{aligned}\int \sqrt{4x^2 + 4x - 8} \, dx &= \frac{(2 \cdot 4x + 4)\sqrt{4}}{4 \cdot 4^2} \sqrt{4(4x^2 + 4x - 8)} \\ &\quad - \frac{\Delta\sqrt{4}}{8 \cdot 4^2} \ln \left| 2 \cdot 4x + 4 + 2\sqrt{4(4x^2 + 4x - 8)} \right| + c_2 \\ &= \frac{(8x + 4)}{16} \sqrt{4x^2 + 4x - 8} - \frac{9}{4} \ln \left| 8x + 4 + 4\sqrt{4x^2 + 4x - 8} \right| + c_2 \quad \text{។}\end{aligned}$$

ចំពោះអាំងតេក្រាល $\int \sqrt{-4x^2 - 4x + 4} \, dx$ មាន $a = -4 < 0$, $\Delta = (-4)^2 - 4(-4)(4)$
 $= 80 > 0$ ។

នោះតាមរូបមន្ត (3.19) យើងបាន៖

$$\begin{aligned}\int \sqrt{-4x^2 - 4x + 4} \, dx &= \frac{(2(-4)x - 4)\sqrt{4}}{4(-4)^2} \sqrt{4(-4x^2 - 4x + 4)} \\ &\quad + \frac{80\sqrt{4}}{8(-4)^2} \sin^{-1} \left(\frac{2(-4)x - 4}{\sqrt{80}} \right) + c_1 \\ &= \frac{(-8x - 4)}{16} \sqrt{-4x^2 - 4x + 4} + \frac{5}{4} \sin^{-1} \left(\frac{-8x - 4}{4\sqrt{5}} \right) + c_1 \quad \text{។}\end{aligned}$$

៣.១៤ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អសនិទានរាង $\int \frac{(\alpha x + \beta) dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$

អាំងតេក្រាល $\int \frac{(\alpha x + \beta)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ ($a \neq 0$) ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមាន

អនុគមន៍អាំងតេក្រាល $\frac{\alpha x + \beta}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ ជាអនុគមន៍អសនិទាន។

យើងមាន $\frac{\alpha x + \beta}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{A(2ax + b)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} + \frac{B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$

នាំឱ្យ $\alpha x + \beta = A(2ax + b) + B = 2aAx + bA + B$

នាំឱ្យ $2aA = \alpha$, $bA + B = \beta \Rightarrow A = \frac{\alpha}{2a}$, $B = \beta - bA = \frac{2a\beta - \alpha b}{2a}$ ។

$$\begin{aligned} \text{នាំឱ្យ } \int \frac{(\alpha x + \beta)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} &= A \int \frac{(2ax + b)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} + B \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \\ &= A \int (ax^2 + bx + c)^{-\frac{1}{2}} d(ax^2 + bx + c) + B \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \\ &= \left[\frac{\alpha}{a} \sqrt{ax^2 + bx + c} + \frac{(2a\beta - \alpha b)}{2a} \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \right] \quad (3.20) \end{aligned}$$

ដែលអាំងតេក្រាល $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ អាចគណនាបានតាមផ្នែក ៣.១២ (រូបមន្ត (3.14) ,

(3.15) និង (3.16))។

ឧទាហរណ៍ទី១៤ គណនា $\int \frac{3x+5}{\sqrt{x^2+2x+4}} dx$ និង $\int \frac{5x-3}{\sqrt{-4x^2-12x+7}} dx$ ។
ដំណោះស្រាយ

ចំពោះអាំងតេក្រាល $\int \frac{3x+5}{\sqrt{x^2+2x+4}} dx$ មាន $\alpha = 3$, $\beta = 5$, $a = 1 > 0$, $\Delta = b^2 - 4ac$
 $= 2^2 - 4(1)(4) = -12 < 0$ ។

នោះតាមរូបមន្ត (3.20) និង (3.15) យើងបាន៖

$$\begin{aligned} \int \frac{3x+5}{\sqrt{x^2+2x+4}} dx &= \frac{3}{1} \sqrt{x^2+2x+4} + \frac{(2 \cdot 1 \cdot 5 - 3 \cdot 2)}{2 \cdot 1} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+4}} \\ &= 3\sqrt{x^2+2x+4} + 2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+4}} \end{aligned}$$

$$= 3\sqrt{x^2 + 2x + 4} + \frac{2}{\sqrt{1}} \ln \left| 2x + 2 + 2\sqrt{1 \cdot (x^2 + 2x + 4)} \right| + c_2$$

ចំពោះអាំងតេក្រាល $\int \frac{5x-3}{\sqrt{-4x^2-12x+7}} dx$ មាន $\alpha=5$, $\beta=-3$, $a=-4 < 0$,

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4(-4)(7) = 256 > 0 \quad \forall$$

នោះតាមរូបមន្ត (3.20) និង (3.16) យើងបាន៖

$$\begin{aligned} \int \frac{5x-3}{\sqrt{-4x^2-12x+7}} dx &= \frac{5}{-4} \sqrt{-4x^2-12x+7} + \frac{(2(-4)(-3)-5(-12))}{2(-4)} \int \frac{dx}{\sqrt{-4x^2-12x+7}} \\ &= -\frac{5}{4} \sqrt{-4x^2-12x+7} - \frac{21}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{-4x^2-12x+7}} \\ &= -\frac{5}{4} \sqrt{-4x^2-12x+7} - \frac{21}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{4}} \sin^{-1} \left(\frac{2(-4)x-12}{\sqrt{256}} \right) + c_1 \\ &= -\frac{5}{4} \sqrt{-4x^2-12x+7} - \frac{21}{4} \sin^{-1} \left(\frac{-8x-12}{16} \right) + c_1 \quad \forall \end{aligned}$$

ជាសរុប ជំពូកទី៣នេះបានផ្តល់នូវវិធីសាស្ត្រគណនាអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អសនិ

ទានមួយចំនួនដូចជា $\int \frac{1}{\sqrt[n]{ax+b}} dx$, $\int \sqrt[n]{ax+b} dx$, $\int \sqrt[n]{(ax+b)^m} dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{k-x^2}} dx$,

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+k}} dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-k}} dx$, $\int \sqrt{k-x^2} dx$, $\int \sqrt{x^2+k} dx$, $\int \sqrt{x^2-k} dx$,

$\int (\alpha x + \beta) \sqrt{ax+b} dx$, $\int \frac{dx}{(\alpha x + \beta) \sqrt{ax+b}}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $\int \sqrt{ax^2+bx+c} dx$

និង $\int \frac{(\alpha x + \beta) dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ ដោយបង្កើតជារូបមន្តដើម្បីយកមកប្រើប្រាស់ជាលក្ខណៈទូទៅនិង

បានអនុវត្តលើឧទាហរណ៍មួយចំនួន។ បន្ទាប់មក យើងនឹងបង្ហាញនិងសិក្សាអំពីប្រភេទអាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍អ៊ីចស្ត្រូណង់ស្យែលនៅក្នុងជំពូកទី៤បន្តទៀត។

ជំពូកទី៤

ប្រភេទអាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល (Types of Integrals Involving Exponential Functions)

នៅក្នុងជំពូកទី៤នេះ យើងនឹងសិក្សាតែអំពីប្រភេទអាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលដែលមានលក្ខណៈពិសេសមួយចំនួននិងដំណោះស្រាយរបស់វាដូចតទៅ៖

៤.១ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល $\int a^{\alpha x + \beta} dx$

អាំងតេក្រាល $\int a^{\alpha x + \beta} dx$ ($a > 0, a \neq 1$) ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $a^{\alpha x + \beta}$ ($a > 0, a \neq 1$) ជាអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល។

ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាល $\int a^{\alpha x + \beta} dx$ យើងប្រើវិធីប្តូរអថេរដោយតាង

$t = a^{\alpha x + \beta}$ ($\alpha \neq 0$) នាំឱ្យ $\ln t = \ln a^{\alpha x + \beta} = (\alpha x + \beta) \ln a$ ($a > 0, a \neq 1$) នាំឱ្យ

$$x = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\ln t}{\ln a} - \beta \right) \text{ និង } dx = \frac{1}{\alpha \ln a} \cdot \frac{dt}{t} \text{ ។}$$

$$\begin{aligned} \text{នាំឱ្យ } \int a^{\alpha x + \beta} dx &= \int t \frac{1}{\alpha \ln a} \frac{dt}{t} = \frac{1}{\alpha \ln a} \int dt \\ &= \frac{1}{\alpha \ln a} t + c = \frac{a^{\alpha x + \beta}}{\alpha \ln a} + c \quad (*) \end{aligned}$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- បើ $a = e, \alpha = 1, \beta = 0$ នាំឱ្យសមីការ (*) ទៅជា

$$\int e^x dx = \boxed{e^x + c} \quad (4.1)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- បើ $\alpha = 1, \beta = 0$ នាំឱ្យសមីការ (*) ទៅជា

$$\int a^x dx = \boxed{\frac{a^x}{\ln a} + c} \quad (4.2)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- បើ $a=e$ នាំឱ្យសមីការ (*) ទៅជា

$$\int e^{\alpha x + \beta} dx = \boxed{\frac{1}{\alpha} e^{\alpha x + \beta} + c} \quad (4.3)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ចំពោះករណីទូទៅ តាមសមីការ (*) ផ្តល់ឱ្យ

$$\int a^{\alpha x + \beta} dx = \boxed{\frac{a^{\alpha x + \beta}}{\alpha \ln a} + c} \quad (4.4)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ និង $a > 0, a \neq 1$ ។

ឧទាហរណ៍ទី១ គណនា $\int 3e^x dx, \int \sqrt{2} \cdot 3^x dx, \int_0^{(1/7)\ln 2} 14e^{7x} dx, \int 7^{2x+3} dx$ និង $\int (3^{4x+5})^6 dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (4.1), (4.2), (4.3) និង (4.4) យើងបាន៖

$$\int 3e^x dx = 3 \int e^x dx = 3e^x + c$$

$$\int \sqrt{2} \cdot 3^x dx = \sqrt{2} \int 3^x dx = \sqrt{2} \cdot \frac{3^x}{\ln 3} + c$$

$$\begin{aligned} \int_0^{(1/7)\ln 2} 14e^{7x} dx &= 14 \int_0^{(1/7)\ln 2} e^{7x} dx = 14 \cdot \frac{e^{7x}}{7} \Big|_0^{(1/7)\ln 2} \\ &= 2(e^{7(1/7)\ln 2} - e^0) = 2(2 - 1) = 2 \end{aligned}$$

$$\int 7^{2x+3} dx = \frac{7^{2x+3}}{2\ln 7} + c$$

$$\text{និង} \quad \int (3^{4x+5})^6 dx = \int 3^{6(4x+5)} dx = \int 3^{24x+30} dx = \frac{3^{24x+30}}{24\ln 3} + c \quad \text{។}$$

ឧទាហរណ៍ទី២ គណនា $\int_0^1 e^{x \cdot \ln a + (1-x) \cdot \ln b} dx$ ($a > 0, b > 0$) ។

ដំណោះស្រាយ

$$\text{យើងមាន } e^{x \cdot \ln a + (1-x) \cdot \ln b} = e^{\ln a^x + \ln b^{1-x}} = e^{\ln(a^x b^{1-x})}$$

$$= a^x b^{1-x} = \frac{a^x}{b^x} b = \left(\frac{a}{b}\right)^x b \quad (*) \quad \text{។}$$

- បើ $a = b$ និងពីសមីការ (*) នាំឱ្យ

$$\int_0^1 e^{x \cdot \ln a + (1-x) \cdot \ln b} dx = \int_0^1 \left(\frac{b}{b}\right)^x b dx = b \int_0^1 dx = b x + c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- បើ $a \neq b$ និងពីសមីការ (*) និងរូបមន្ត (2) យើងបាន៖

$$\int_0^1 e^{x \cdot \ln a + (1-x) \cdot \ln b} dx = \int_0^1 \left(\frac{a}{b}\right)^x b dx = b \int_0^1 \left(\frac{a}{b}\right)^x dx$$

ដូចនេះ ចំពោះ $a > 0, b > 0, a \neq b$ យើងបានរូបមន្ត

$$\int_0^1 e^{x \cdot \ln a + (1-x) \cdot \ln b} dx = \int_0^1 a^x b^{1-x} dx = \int_0^1 \left(\frac{a}{b}\right)^x b dx = \boxed{\frac{a-b}{\ln a - \ln b}} \quad (4.5) \quad \text{។}$$

ឧទាហរណ៍ទី៣ គណនា $\int_0^{+\infty} e^{ax} dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (3) និង $a \neq 0$ យើងបាន៖

$$\int_0^{+\infty} e^{ax} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{ax} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{a} e^{ax} \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{a} (e^{ab} - 1) \quad (*) \quad \text{។}$$

ប្រសិនបើ $a = x + iy \in \mathbb{C}$ ដែល $\operatorname{Re}(a) = x < 0$ នាំឱ្យ

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow +\infty} e^{ab} &= \lim_{b \rightarrow +\infty} e^{(x+iy)b} = \lim_{b \rightarrow +\infty} e^{xb+iyb} \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{\cos yb + i \sin yb}{e^{-xb}} \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{\cos yb}{e^{-xb}} + i \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{\sin yb}{e^{-xb}} = 0 + i \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

និងតាមសមីការ (*) យើងបាន៖

$$\int_0^{+\infty} e^{ax} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{a} (e^{ab} - 1) = \frac{1}{a} (0 - 1) = \boxed{-\frac{1}{a}} \quad (4.6)$$

ដែល $\operatorname{Re}(a) < 0$ ។

យើងអាចទាញបាន

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} dx = \boxed{\frac{1}{a}} \quad (4.7)$$

ដែល $-\operatorname{Re}(a) = \operatorname{Re}(-a) < 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(a) > 0$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៤ គណនា $\int_0^1 e^{x \cdot \ln 7 + (1-x) \cdot \ln 9} dx$ និង $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{3}x} dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (4.5) និង (4.7) យើងបាន៖

$$\int_0^1 e^{x \cdot \ln 7 + (1-x) \cdot \ln 9} dx = \frac{7-9}{\ln 7 - \ln 9} = \frac{-2}{\ln 7 - \ln 9}$$

និង $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{3}x} dx = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៥ គណនា $\int e^{5x} \left(\frac{e^{2x}}{7} + \frac{3}{e^{3x}} \right) dx$, $\int (e^{4x} - e^{-4x})^2 dx$ និង $\int_0^1 \frac{3^x + 4^x}{5^x} dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងបាន៖

$$\begin{aligned} \int e^{5x} \left(\frac{e^{2x}}{7} + \frac{3}{e^{3x}} \right) dx &= \int \left(\frac{e^{7x}}{7} + 3e^{2x} \right) dx = \frac{1}{7} \int e^{7x} dx + 3 \int e^{2x} dx \\ &= \frac{1}{7} \cdot \frac{e^{7x}}{7} + 3 \cdot \frac{e^{2x}}{2} + c = \frac{1}{49} e^{7x} + \frac{3}{2} e^{2x} + c \quad (\text{តាមរូបមន្ត (4.3)}) \end{aligned}$$

$$\int (e^{4x} - e^{-4x})^2 dx = \int [(e^{4x})^2 - 2(e^{4x})(e^{-4x}) + (e^{-4x})^2] dx$$

$$\begin{aligned} \text{និង } \int_0^1 \frac{3^x + 4^x}{5^x} dx &= \int_0^1 [(3/5)^x + (4/5)^x] dx \\ &= \left[\frac{(3/5)^x}{\ln(3/5)} + \frac{(4/5)^x}{\ln(4/5)} \right] \Big|_0^1 \quad (\text{តាមរូបមន្ត (4.2)}) \\ &= \left[\frac{3/5}{\ln(3/5)} + \frac{4/5}{\ln(4/5)} \right] - \left[\frac{1}{\ln(3/5)} + \frac{1}{\ln(4/5)} \right] \\ &= \frac{(3/5)-1}{\ln(3/5)} + \frac{(4/5)-1}{\ln(4/5)} = -\frac{2}{5\ln(3/5)} - \frac{1}{5\ln(4/5)} \quad \text{។} \end{aligned}$$

៤.២ អាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលរាង $\int \frac{dx}{p+a^{\alpha x}}$

អាំងតេក្រាល $\int \frac{dx}{p+a^{\alpha x}}$ ($a > 0, a \neq 1$) ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $\frac{1}{p+a^{\alpha x}}$ ។ អនុគមន៍នេះមានអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល $a^{\alpha x}$ ។

ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាល $\int \frac{dx}{p+a^{\alpha x}}$ យើងប្រើវិធីប្តូរអថេរដោយតាង

$$t = p + a^{\alpha x} \quad (\alpha \neq 0) \quad \text{នាំឱ្យ} \quad x = \frac{\ln(t-p)}{\alpha \ln a} \quad \text{និង} \quad dx = \frac{1}{\alpha \ln a} \cdot \frac{dt}{t-p} \quad \text{។}$$

$$\text{នាំឱ្យ} \quad \int \frac{dx}{p+a^{\alpha x}} = \int \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{\alpha \ln a} \cdot \frac{dt}{t-p} = \frac{1}{\alpha \ln a} \int \frac{1}{t(t-p)} dt \quad (*) \quad \text{។}$$

- បើ $p=0$ នាំឱ្យសមីការ (*) ទៅជា

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{p+a^{\alpha x}} &= \int \frac{dx}{a^{\alpha x}} = \frac{1}{\alpha \ln a} \int \frac{1}{t^2} dt = \frac{1}{\alpha \ln a} \int t^{-2} dt \\ &= \frac{1}{\alpha \ln a} \cdot \frac{t^{-1}}{(-1)} + c = \frac{-1}{\alpha \ln a} \cdot \frac{1}{t} + c = \boxed{\frac{-1}{\alpha \ln a} \cdot \frac{1}{a^{\alpha x}} + c} \quad (4.8) \end{aligned}$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ និង $a > 0, a \neq 1, \alpha \neq 0$ ។

- បើ $p \neq 0$ នាំឱ្យសមីការ (*) ទៅជា

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{p+a^{\alpha x}} &= \frac{1}{\alpha \ln a} \int \frac{1}{t(t-p)} dt = \frac{1}{\alpha p \ln a} \int \frac{t-(t-p)}{t(t-p)} dt \\ &= \frac{1}{\alpha p \ln a} \int \left(\frac{1}{t-p} - \frac{1}{t} \right) dt = \frac{1}{\alpha p \ln a} (\ln|t-p| - \ln|t|) + c \\ &= \frac{1}{\alpha p \ln a} (\alpha x \ln a - \ln|p+a^{\alpha x}|) + c_1 \\ &= \boxed{\frac{x}{p} - \frac{1}{\alpha p \ln a} \ln|p+a^{\alpha x}| + c_1} \quad (4.9) \end{aligned}$$

ដែល c, c_1 ជាចំនួនពិតថេរ និង $a > 0, a \neq 1, \alpha \neq 0$ ។

- ករណីពិសេស បើ $a=e$ នាំឱ្យសមីការ (4.9) ទៅជា

$$\int \frac{dx}{p+e^{\alpha x}} = \boxed{\frac{x}{p} - \frac{1}{\alpha p} \ln|p+e^{\alpha x}| + c_1} \quad (4.10)$$

ដែល c_1 ជាចំនួនពិតថេរ។

ឧទាហរណ៍ទី៦ គណនា $\int \frac{dx}{3 \cdot 7^{2x}}$, $\int \frac{dx}{3+e^{6x}}$ និង $\int \frac{dx}{7-5^{4x}}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (4.8), (4.10) និង (4.9) យើងបាន៖

$$\int \frac{dx}{3 \cdot 7^{2x}} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{7^{2x}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{-1}{2 \ln 7} \cdot \frac{1}{7^{2x}} + c = \frac{-1}{6 \ln 7} \cdot \frac{1}{7^{2x}} + c$$

$$\int \frac{dx}{3+e^{6x}} = \frac{x}{3} - \frac{1}{6 \cdot 3} \ln |3+e^{6x}| + c = \frac{x}{3} - \frac{1}{18} \ln |3+e^{6x}| + c$$

$$\begin{aligned} \text{និង } \int \frac{dx}{7-5^{4x}} &= - \int \frac{dx}{-7+5^{4x}} = - \left[\frac{x}{-7} - \frac{1}{4 \cdot (-7) \ln 5} \ln |-7+5^{4x}| \right] + c \\ &= \frac{x}{7} - \frac{1}{28 \ln 5} \ln |7-5^{4x}| + c \end{aligned}$$

ឧទាហរណ៍ទី៧ គណនា $\int_0^1 \frac{e^{2x} dx}{8+6^{3e^{2x}}}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $t = e^{2x}$ នាំឱ្យ $dt = 2e^{2x} dx \Leftrightarrow e^{2x} dx = \frac{dt}{2}$ ។ ពិនិត្យគោល៖ បើ $x=0$ នាំឱ្យ

$t=1$ និង បើ $x=1$ នាំឱ្យ $t=e^2$ ។

$$\begin{aligned} \text{នាំឱ្យ } \int_0^1 \frac{e^{2x} dx}{8+6^{3e^{2x}}} &= \int_1^{e^2} \frac{\frac{dt}{2}}{8+6^{3t}} = \frac{1}{2} \int_1^{e^2} \frac{dt}{8+6^{3t}} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{t}{8} - \frac{1}{3(8) \ln 6} \ln |8+6^{3t}| \right] \Bigg|_1^{e^2} \quad (\text{តាមរូបមន្ត (4.9)}) \\ &= \left(\frac{e^2}{16} - \frac{1}{48 \ln 6} \ln (8+6^{3e^2}) \right) - \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{48 \ln 6} \ln (224) \right) \\ &= \frac{e^2-1}{16} + \frac{\ln 224 - \ln (8+6^{3e^2})}{48 \ln 6} \end{aligned}$$

៤.៣ អាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលរាង $\int \frac{dx}{(p+a^{\alpha x})^2}$

អាំងតេក្រាល $\int \frac{dx}{(p+a^{\alpha x})^2}$ ($a > 0$, $a \neq 1$) ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $\frac{1}{(p+a^{\alpha x})^2}$ ។ អនុគមន៍នេះមានអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល $a^{\alpha x}$ ។

ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាល $\int \frac{dx}{(p+a^{\alpha x})^2}$ យើងតាង $t = p + a^{\alpha x}$ ($\alpha \neq 0$)

នាំឱ្យ $x = \frac{\ln(t-p)}{\alpha \ln a}$ និង $dx = \frac{1}{\alpha \ln a} \cdot \frac{dt}{t-p}$ ។

នាំឱ្យ $\int \frac{dx}{(p+a^{\alpha x})^2} = \int \frac{1}{t^2} \cdot \frac{1}{\alpha \ln a} \cdot \frac{dt}{t-p} = \frac{1}{\alpha \ln a} \int \frac{1}{t^2(t-p)} dt$ (*) ។

- បើ $p=0$ នាំឱ្យសមីការ (*) ទៅជា

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(p+a^{\alpha x})^2} &= \int \frac{dx}{(a^{\alpha x})^2} = \frac{1}{\alpha \ln a} \int \frac{1}{t^3} dt \\ &= \frac{1}{\alpha \ln a} \int t^{-3} dt = \frac{1}{\alpha \ln a} \cdot \frac{t^{-2}}{(-2)} + c \\ &= \frac{-1}{2\alpha \ln a} \cdot \frac{1}{t^2} + c = \frac{-1}{2\alpha \ln a} \cdot \frac{1}{(a^{\alpha x})^2} + c \\ &= \boxed{\frac{-1}{2\alpha \ln a} \cdot \frac{1}{a^{2\alpha x}} + c} \quad (4.11) \end{aligned}$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ និង $a > 0$, $a \neq 1$, $\alpha \neq 0$ ។

- បើ $p \neq 0$ នាំឱ្យសមីការ (*) ទៅជា

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(p+a^{\alpha x})^2} &= \frac{1}{\alpha \ln a} \int \frac{1}{t^2(t-p)} dt = \frac{1}{\alpha p \ln a} \int \frac{t-(t-p)}{t^2(t-p)} dt \\ &= \frac{1}{\alpha p \ln a} \int \frac{1}{t(t-p)} dt - \frac{1}{\alpha p \ln a} \int \frac{1}{t^2} dt \\ &= \frac{1}{\alpha p^2 \ln a} \int \left(\frac{1}{t-p} - \frac{1}{t} \right) dt - \frac{1}{\alpha p \ln a} \int t^{-2} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\alpha p^2 \ln a} (\ln|t-p| - \ln|t|) - \frac{1}{\alpha p \ln a} \cdot \frac{t^{-1}}{(-1)} + c \\
&= \frac{1}{\alpha p^2 \ln a} (\ln|p+a^{\alpha x}-p| - \ln|p+a^{\alpha x}|) \\
&\quad - \frac{1}{\alpha p \ln a} \cdot \frac{1}{(p+a^{\alpha x})} + c \\
&= \frac{1}{\alpha p^2 \ln a} (\alpha x \ln a - \ln|p+a^{\alpha x}|) + \frac{1}{\alpha p \ln a (p+a^{\alpha x})} + c_1 \\
&= \boxed{\frac{x}{p^2} - \frac{1}{\alpha p^2 \ln a} \ln|p+a^{\alpha x}| + \frac{1}{\alpha p \ln a (p+a^{\alpha x})} + c_1} \quad (4.12)
\end{aligned}$$

ដែល c, c_1 ជាចំនួនពិតថេរ និង $a > 0, a \neq 1, \alpha \neq 0$ ។

- ករណីពិសេស បើ $a = e$ នាំឱ្យសមីការ (4.12) ទៅជា

$$\int \frac{dx}{(p+e^{\alpha x})^2} = \boxed{\frac{x}{p^2} - \frac{1}{\alpha p^2} \ln|p+e^{\alpha x}| + \frac{1}{\alpha p (p+e^{\alpha x})} + c_1} \quad (4.13)$$

ដែល c_1 ជាចំនួនពិតថេរ។

ឧទាហរណ៍ទី៨ គណនា $\int \frac{dx}{(3 \cdot 7^{2x})^2}$ និង $\int \frac{dx}{(3+e^{6x})^2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (4.11) និង (4.13) យើងបាន៖

$$\int \frac{dx}{(3 \cdot 7^{2x})^2} = \frac{1}{3^2} \int \frac{dx}{(7^{2x})^2} = \frac{1}{9} \left[\frac{-1}{2 \cdot 2 \ln 7} \cdot \frac{1}{7^{2 \cdot 2x}} \right] + c = \frac{-1}{36 \ln 7} \cdot \frac{1}{7^{4x}} + c$$

$$\begin{aligned}
\text{និង } \int \frac{dx}{(3+e^{6x})^2} &= \frac{x}{3^2} - \frac{1}{6 \cdot 3^2} \ln|3+e^{6x}| + \frac{1}{6 \cdot 3(3+e^{6x})} + c \\
&= \frac{x}{9} - \frac{1}{54} \ln|3+e^{6x}| + \frac{1}{18(3+e^{6x})} + c \quad \text{។}
\end{aligned}$$

ឧទាហរណ៍ទី៩ គណនា $\int_0^2 \frac{t^2 dt}{(2+e^{4t^3})^2}$ ។

ជំនួញស្រាយ

តាង $x = t^3$ នាំឱ្យ $dx = 3t^2 dt \Leftrightarrow t^2 dt = \frac{dx}{3}$ ។ ពិនិត្យគោល៖ បើ $t = 0$ នាំឱ្យ $x = 0$

និង បើ $t = 2$ នាំឱ្យ $x = 2^3 = 8$ ។ នាំឱ្យ

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{t^2 dt}{(2+e^{4t^3})^2} &= \int_0^8 \frac{\frac{dx}{3}}{(2+e^{4x})^2} = \frac{1}{3} \int_0^8 \frac{dx}{(2+e^{4x})^2} \\ &= \frac{1}{3} \left[\frac{x}{2^2} - \frac{1}{4(2^2)} \ln|2+e^{4x}| + \frac{1}{4(2)(2+e^{4x})} \right] \Bigg|_0^8 \quad (\text{តាមរូបមន្ត (4.13)}) \\ &= \left(\frac{8}{12} - \frac{1}{48} \ln(2+e^{32}) + \frac{1}{24(2+e^{32})} \right) - \left(0 - \frac{1}{48} \ln 3 + \frac{1}{72} \right) \\ &= \frac{47}{72} + \frac{1}{48} \ln\left(\frac{3}{2+e^{32}}\right) + \frac{1}{24(2+e^{32})} \approx 0.008998 \quad \text{។} \end{aligned}$$

៤.៤ អាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលរាង $\int \frac{a^{2\alpha x} dx}{p+qa^{\alpha x}}$

អាំងតេក្រាល $\int \frac{a^{2\alpha x} dx}{p+qa^{\alpha x}}$ ($a > 0$, $a \neq 1$) ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមាន

អនុគមន៍អាំងតេក្រាល $\frac{a^{2\alpha x}}{p+qa^{\alpha x}}$ ។ អនុគមន៍នេះមានអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល $a^{\alpha x}$

និង $a^{2\alpha x}$ ។

ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាល $\int \frac{a^{2\alpha x} dx}{p+qa^{\alpha x}}$ យើងតាង $t = p+qa^{\alpha x}$ ($\alpha \neq 0$) នាំឱ្យ

$$a^{\alpha x} = \frac{t-p}{q}, \quad x = \frac{\ln(t-p) - \ln q}{\alpha \ln a} \quad \text{និង} \quad dx = \frac{1}{\alpha \ln a} \cdot \frac{dt}{t-p} \quad \text{។}$$

$$\begin{aligned} \text{នាំឱ្យ} \quad \int \frac{a^{2\alpha x} dx}{p+qa^{\alpha x}} &= \int \frac{(a^{\alpha x})^2 dx}{p+qa^{\alpha x}} = \int \frac{[(t-p)/q]^2}{t} \cdot \frac{1}{\alpha \ln a} \cdot \frac{dt}{t-p} \\ &= \frac{1}{\alpha q^2 \ln a} \int \frac{(t-p)^2}{t} dt \quad (*) \quad \text{។} \end{aligned}$$

- បើ $p=0$ និង $q \neq 0$ នាំឱ្យសមីការ (*) ទៅជា

$$\int \frac{a^{2\alpha x} dx}{p+qa^{\alpha x}} = \int \frac{a^{2\alpha x} dx}{qa^{\alpha x}} = \frac{1}{\alpha q^2 \ln a} \int \frac{(t-0)}{t} dt$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\alpha q^2 \ln a} \int dt = \frac{1}{\alpha q^2 \ln a} \cdot t + c \\
&= \frac{1}{\alpha q^2 \ln a} \cdot q a^{\alpha x} + c = \boxed{\frac{1}{\alpha q \ln a} \cdot a^{\alpha x} + c} \quad (4.14)
\end{aligned}$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ និង $a > 0, a \neq 1, \alpha \neq 0$ ។

- បើ $p \neq 0$ និង $q \neq 0$ នាំឱ្យសមីការ (*) ទៅជា

$$\begin{aligned}
\int \frac{a^{2\alpha x} dx}{p + q a^{\alpha x}} &= \frac{1}{\alpha q^2 \ln a} \int \frac{(t-p)}{t} dt = \frac{1}{\alpha q^2 \ln a} \int \left(1 - \frac{p}{t}\right) dt \\
&= \frac{1}{\alpha q^2 \ln a} (t - p \ln |t|) + c \\
&= \frac{1}{\alpha q^2 \ln a} \left(p + q a^{\alpha x} - p \ln |p + q a^{\alpha x}| \right) + c \\
&= \boxed{\frac{a^{\alpha x}}{\alpha q \ln a} - \frac{p}{\alpha q^2 \ln a} \ln |p + q a^{\alpha x}| + c_1} \quad (4.15)
\end{aligned}$$

ដែល c, c_1 ជាចំនួនពិតថេរ និង $a > 0, a \neq 1, \alpha \neq 0$ ។

- ករណីពិសេស បើ $a = e$ នាំឱ្យសមីការ (15) ទៅជា

$$\int \frac{a^{2\alpha x} dx}{p + q a^{\alpha x}} = \boxed{\frac{a^{\alpha x}}{\alpha q} - \frac{p}{\alpha q^2} \ln |p + q a^{\alpha x}| + c_1} \quad (4.16)$$

ដែល c_1 ជាចំនួនពិតថេរ។

ឧទាហរណ៍ទី១០ គណនា $\int \frac{7^{4x} dx}{3 \cdot 7^{2x}}, \int \frac{e^{12x} dx}{3 + 4 \cdot e^{6x}}$ និង $\int \frac{5^{8x} dx}{7 - 6 \cdot 5^{4x}}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (4.14), (4.16) និង (4.15) យើងបាន៖

$$\begin{aligned}
\int \frac{7^{4x} dx}{3 \cdot 7^{2x}} &= \frac{1}{2 \cdot 3 \ln 7} \cdot 7^{2x} + c = \frac{1}{6 \ln 7} \cdot 7^{2x} + c \\
\int \frac{e^{12x} dx}{3 + 4 \cdot e^{6x}} &= \frac{e^{6x}}{6 \cdot 4} - \frac{3}{6 \cdot 4^2} \ln |3 + 4 \cdot e^{6x}| + c_1
\end{aligned}$$

$$= \frac{e^{6x}}{24} - \frac{1}{32} \ln |3 + 4 \cdot e^{6x}| + c_1$$

និង
$$\int \frac{5^{8x} dx}{7 - 6 \cdot 5^{4x}} = \frac{5^{4x}}{4(-6)} - \frac{7}{4(-6)^2} \ln |7 - 6 \cdot 5^{4x}| + c_1$$

$$= -\frac{5^{4x}}{24} - \frac{7}{144} \ln |7 - 6 \cdot 5^{4x}| + c_1 \quad \text{។}$$

៤.៥ អាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលរាង $\int \frac{dx}{p a^{\alpha x} + q a^{-\alpha x}}$

អាំងតេក្រាល $\int \frac{dx}{p a^{\alpha x} + q a^{-\alpha x}}$ ($a > 0, a \neq 1$) ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់

ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $\frac{1}{p a^{\alpha x} + q a^{-\alpha x}}$ ។ អនុគមន៍នេះមានអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល $a^{\alpha x}$ និង $a^{-\alpha x}$ ។

ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាល $\int \frac{dx}{p a^{\alpha x} + q a^{-\alpha x}}$ យើងតាង $t = a^{\alpha x}$ ($\alpha \neq 0$)

នាំឱ្យ $dt = \alpha a^{\alpha x} \ln a \, dx$ និង $dx = \frac{1}{\alpha \ln a} \cdot \frac{dt}{t}$ ។

នាំឱ្យ $\int \frac{dx}{p a^{\alpha x} + q a^{-\alpha x}} = \int \frac{1}{p t + \frac{q}{t}} \cdot \frac{1}{\alpha \ln a} \cdot \frac{dt}{t} = \frac{1}{\alpha \ln a} \int \frac{dt}{p t^2 + q} \quad (*)$ ។

- បើ $p q > 0$ នាំឱ្យសមីការ (*) ទៅជា

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{p a^{\alpha x} + q a^{-\alpha x}} &= \frac{1}{\alpha p \ln a} \int \frac{dt}{t^2 + \frac{q}{p}} \\ &= \frac{1}{\alpha p \ln a} \cdot \frac{1}{\sqrt{q/p}} \tan^{-1} \left(\frac{t}{\sqrt{q/p}} \right) + c \\ &= \boxed{\frac{1}{\alpha \sqrt{pq} \ln a} \tan^{-1} \left(\sqrt{p/q} a^{\alpha x} \right) + c} \quad (4.17) \end{aligned}$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ និង $a > 0, a \neq 1, \alpha \neq 0$ ។

ករណីពិសេស បើ $a = e$ នាំឱ្យសមីការ (4.17) ទៅជា

$$\int \frac{dx}{pe^{\alpha x} + qe^{-\alpha x}} = \boxed{\frac{1}{\alpha \sqrt{pq}} \tan^{-1}(\sqrt{p/q} e^{\alpha x}) + c} \quad (4.18)$$

ដែល c_1 ជាចំនួនពិតថេរ។

- បើ $pq < 0 \Leftrightarrow -pq > 0$ នាំឱ្យសមីការ (*) ទៅជា

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{pa^{\alpha x} + qa^{-\alpha x}} &= \frac{1}{\alpha p \ln a} \int \frac{dt}{t^2 + \frac{q}{p}} = \frac{1}{\alpha p \ln a} \int \frac{dt}{t^2 - (\sqrt{-q/p})^2} \\ &= \frac{1}{\alpha p \ln a} \cdot \frac{1}{2\sqrt{-q/p}} \ln \left| \frac{t - \sqrt{-q/p}}{t + \sqrt{-q/p}} \right| + c \\ &= \boxed{\frac{1}{2\alpha \sqrt{-pq} \ln a} \ln \left| \frac{a^{\alpha x} - \sqrt{-q/p}}{a^{\alpha x} + \sqrt{-q/p}} \right| + c} \quad (4.19) \end{aligned}$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ និង $a > 0, a \neq 1, \alpha \neq 0$ ។

ករណីពិសេស បើ $a = e$ នាំឱ្យសមីការ (4.19) ទៅជា

$$\int \frac{dx}{pe^{\alpha x} + qe^{-\alpha x}} = \boxed{\frac{1}{2\alpha \sqrt{-pq}} \ln \left| \frac{e^{\alpha x} - \sqrt{-q/p}}{e^{\alpha x} + \sqrt{-q/p}} \right| + c} \quad (4.20)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ឧទាហរណ៍ទី១១ គណនា $\int \frac{dx}{3e^{2x} + 4e^{-2x}}, \int \frac{dx}{3e^{2x} - 4e^{-2x}}, \int \frac{dx}{3 \cdot 5^{6x} + 4 \cdot 5^{-6x}}$

និង $\int \frac{dx}{-3 \cdot 5^{6x} + 4 \cdot 5^{-6x}}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (4.18), (4.20), (4.17) និង (4.19) យើងបាន៖

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{3e^{2x} + 4e^{-2x}} &= \frac{1}{2\sqrt{3 \cdot 4}} \tan^{-1}(\sqrt{3/4} e^{2x}) + c \\ &= \frac{1}{4\sqrt{3}} \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} e^{2x}\right) + c \\ \int \frac{dx}{3e^{2x} - 4e^{-2x}} &= \frac{1}{2 \cdot 2\sqrt{-3(-4)}} \ln \left| \frac{e^{2x} - \sqrt{-(-4)/3}}{e^{2x} + \sqrt{-(-4)/3}} \right| + c \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{8\sqrt{3}} \ln \left| \frac{e^{2x} - 2/\sqrt{3}}{e^{2x} + 2/\sqrt{3}} \right| + c$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{3 \cdot 5^{6x} + 4 \cdot 5^{-6x}} &= \frac{1}{6\sqrt{3 \cdot 4} \ln 5} \tan^{-1} \left(\sqrt{3/4} 5^{6x} \right) + c \\ &= \frac{1}{12\sqrt{3} \ln 5} \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} 5^{6x} \right) + c \end{aligned}$$

និង
$$\int \frac{dx}{-3 \cdot 5^{6x} + 4 \cdot 5^{-6x}} = \frac{1}{2 \cdot 6\sqrt{-(-3) \cdot 4} \ln 5} \ln \left| \frac{5^{6x} - \sqrt{-4/(-3)}}{5^{6x} + \sqrt{-4/(-3)}} \right| + c$$

៤.៦ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx$

អាំងតេក្រាល $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx$ ($a > 0$) ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍

អាំងតេក្រាល e^{-ax^2} ជាអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល។ ឥឡូវនេះ យើងតាង

$$I(a) = \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx \quad (a > 0) \text{ ។}$$

$$\begin{aligned} \text{នាំឱ្យ } (I(a))^2 &= \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx \int_0^{+\infty} e^{-ay^2} dy \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} e^{-ay^2} dx dy = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-a(x^2+y^2)} dx dy \quad (*) \text{ ។} \end{aligned}$$

តាង $y = xt$, $t > 0$ នាំឱ្យ $dy = x dt$, $t > 0$ និងតាមសមីការ (*) នាំឱ្យ

$$(I(a))^2 = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-a(x^2+x^2t^2)} x dx dt = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-a(1+t^2)x^2} x dx dt \quad (*_1) \text{ ។}$$

តាង $u = -a(1+t^2)x^2$ នាំឱ្យ $du = -2a(1+t^2)x dx$ ~~$\Rightarrow dx$~~ $= \frac{du}{2a(1+t^2)}$ និង

តាមសមីការ $(*_1)$ នាំឱ្យ

$$(I(a))^2 = - \int_0^{+\infty} \int_0^{-\infty} e^u \frac{du}{2a(1+t^2)} dt = - \frac{1}{2a} \int_0^{+\infty} \int_0^{-\infty} \frac{e^u}{1+t^2} du dt$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{2a} \int_0^{+\infty} \frac{e^u}{1+t^2} \Big|_0^{-\infty} dt = \frac{1}{2a} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} \\
 &= \frac{1}{2a} \tan^{-1}(t) \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2a} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{\pi}{4a}
 \end{aligned}$$

នាំឱ្យ $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx = I(a) = \sqrt{\frac{\pi}{4a}} = \boxed{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}} \quad (4.21)$

និង $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \boxed{\sqrt{\frac{\pi}{a}}} \quad (4.22)$

ដែល $a > 0$ ។

ឥឡូវនេះ យើងនឹងគណនាអាំងតេក្រាល $\int_{\mu}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$ និង

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \quad \text{។}$$

យើងតាង $t = \frac{x-\mu}{\sigma}$ នាំឱ្យ $dt = \frac{dx}{\sigma} \Leftrightarrow dx = \sigma dt$ ។

$$\begin{aligned}
 \text{នាំឱ្យ} \quad \int_{\mu}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} \sigma dt \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{1/2}} = \boxed{\frac{1}{2}} \quad (4.23) \quad (\text{តាមរូបមន្ត (4.21)})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{និង} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} \sigma dt \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{1/2}} = \boxed{1} \quad (4.24) \quad (\text{តាមរូបមន្ត (4.22)})$$

ឧទាហរណ៍ទី១២ គណនា $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{3}x^2} dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-9x^2} dx$, $\int_5^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-5}{2}\right)^2} dx$ និង

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-7}{3}\right)^2} dx$$

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (4.21), (4.22), (4.23) និង (4.24) យើងបាន៖

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{3}x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\sqrt{3}}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-9x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{9}} = \frac{\sqrt{\pi}}{3}$$

$$\int_5^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-5}{2}\right)^2} dx = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2\pi} = \sqrt{2\pi}$$

និង $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-7}{3}\right)^2} dx = 3\sqrt{2\pi}$ ។

៤.៧ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+bx+c)} dx$

អាំងតេក្រាល $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+bx+c)} dx$ ($a > 0$) ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមាន

អនុគមន៍អាំងតេក្រាល $e^{-(ax^2+bx+c)}$ ជាអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល។

យើងមាន

$$-(ax^2+bx+c) = -a\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}\right) = -a\left(x^2 + 2x\frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)$$

នាំឱ្យ $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+bx+c)} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{b^2-4ac}{4a}} dx$

$$= e^{\frac{b^2-4ac}{4a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(x+\frac{b}{2a})^2} d(x+\frac{b}{2a})$$

$$= \boxed{\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2-4ac}{4a}}} \quad (4.25) \quad (\text{តាមរូបមន្ត (4.22)})$$

ស្រដៀងគ្នាដែរ យើងបាន

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} e^{-2bx} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2-2bx} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(x+b/a)^2+b^2/a} dx$$

ចំពោះអាំងតេក្រាល $\int_{-b/2a}^{+\infty} e^{-(ax^2+bx+c)} dx$ យើងតាង $u = x + \frac{b}{2a}$ នាំឱ្យ $du = dx$ ។

$$\text{នាំឱ្យ} \quad \int_{-b/2a}^{+\infty} e^{-(ax^2+bx+c)} dx = \int_{-b/2a}^{+\infty} e^{-a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{b^2-4ac}{4a}} dx$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-au^2+\frac{b^2-4ac}{4a}} du = e^{\frac{b^2-4ac}{4a}} \int_0^{+\infty} e^{-au^2} du$$

$$= \boxed{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2-4ac}{4a}}} \quad (4.27) \quad (\text{តាមរូបមន្ត (4.21)})$$

ឧទាហរណ៍ទី១៣ គណនា $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(2x^2+3x+4)} dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-16x^2} e^{-6x} dx$ និង

$$\int_{-5/6}^{+\infty} e^{-(3x^2+5x+7)} dx \quad \text{។}$$

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (4.25), (4.26) និង (4.27) យើងបាន៖

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(2x^2+3x+4)} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{3^2-4 \cdot 2 \cdot 4}{4 \cdot 2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{23}{8}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-16x^2} e^{-6x} dx = \sqrt{\frac{\pi}{16}} e^{3^2/16} = \frac{1}{4} \sqrt{\pi} e^{9/16}$$

និង
$$\int_{-5/6}^{+\infty} e^{-(3x^2+5x+7)} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{3}} e^{\frac{5^2-4\cdot3\cdot7}{4\cdot3}} = \frac{1}{6} \sqrt{3\pi} e^{-\frac{59}{12}} \text{ ។}$$

ជាសរុប ជំពូកទី៤នេះបានផ្តល់នូវវិធីសាស្ត្រគណនាអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនិងអាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលមួយចំនួនដូចជា $\int a^{\alpha x + \beta} dx$,

$$\int e^{\alpha x + \beta} dx, \quad \int \frac{dx}{p + qa^{\alpha x}}, \quad \int \frac{dx}{(p + qa^{\alpha x})^2}, \quad \int \frac{a^{2\alpha x} dx}{p + qa^{\alpha x}}, \quad \int \frac{dx}{pa^{\alpha x} + qa^{-\alpha x}},$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx, \quad \int_{\mu}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+bx+c)} dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} e^{-2bx} dx \quad \text{និង} \quad \int_{-b/2a}^{+\infty} e^{-(ax^2+bx+c)} dx \quad \text{ដោយបង្កើតជា}$$

រូបមន្តដើម្បីយកមកប្រើប្រាស់ជាលក្ខណៈទូទៅនិងបានអនុវត្តន៍លើឧទាហរណ៍មួយចំនួន។
បន្ទាប់មក យើងនឹងបង្ហាញនិងសិក្សាអំពីប្រភេទអាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍លោការីតនៅក្នុង
ជំពូកទី៥បន្តទៀត។

ជំពូកទី៥

ប្រភេទអាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍លោការីត

(Types of Integrals Involving Logarithmic Functions)

នៅក្នុងជំពូកទី៥នេះ យើងនឹងសិក្សាតែអំពីប្រភេទអាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍លោការីតដែលមានលក្ខណៈពិសេសមួយចំនួននិងដំណោះស្រាយរបស់វាដូចតទៅ៖

៥.១ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍លោការីតរាង $\int \log_a(px+q) dx$

អាំងតេក្រាល $\int \log_a(px+q) dx$ ($a > 0, a \neq 1$) ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $\log_a(px+q)$ ($a > 0, a \neq 1$) ជាអនុគមន៍លោការីតដែលកំណត់បានកាលណា $px+q > 0$ ។

យើងចាប់ផ្តើមគណនាអាំងតេក្រាល $\int \log_a(px+q) dx$ ដោយសិក្សាពីករណីគឺ

$p = 0$ និង $p \neq 0$ ។

- ករណី $p = 0$ នាំឱ្យ $\int \log_a(px+q) dx = \int \log_a q dx = x \log_a q + c$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ និង $q > 0$ ។

- ករណី $p \neq 0$ យើងប្រើវិធីអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក

ដោយយក $u = \log_a(px+q) = \frac{\ln(px+q)}{\ln a}$ នាំឱ្យ $du = \frac{p dx}{(px+q) \ln a}$

និង $dv = dx$ នាំឱ្យ $v = x$ ។

នាំឱ្យ $\int \log_a(px+q) dx = \int u dv = uv - \int v du$

$$= x \log_a(px+q) - \frac{1}{\ln a} \int \frac{px}{(px+q)} dx$$

$$= x \log_a(px+q) - \frac{1}{\ln a} \int \frac{(px+q)-q}{(px+q)} dx$$

$$\begin{aligned}
&= x \log_a (p x + q) - \frac{1}{\ln a} \int \left(1 - \frac{q}{p x + q} \right) dx \\
&= x \log_a (p x + q) - \frac{1}{\ln a} \left(x - \frac{q}{p} \ln |p x + q| \right) + c \\
&= \frac{(p x + q)}{p} \log_a (p x + q) - \frac{x}{\ln a} + c \quad (p x + q > 0) \\
&= \frac{(p x + q) \ln (p x + q) - p x}{p \ln a} + c
\end{aligned}$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ដូចនេះ យើងបានរូបមន្ត

$$\boxed{\int \log_a (p x + q) dx = \frac{(p x + q)}{p} \log_a (p x + q) - \frac{x}{\ln a} + c = \frac{(p x + q) \ln (p x + q) - p x}{p \ln a} + c} \quad (5.1)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- ចំពោះ $a = e$, $p = 1$ និង $q = 0$ នោះតាមរូបមន្ត (5.1) ផ្តល់ឱ្យ

$$\boxed{\int \ln x dx = x \ln x - x + c} \quad (5.2)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- ចំពោះ $p = 1$ និង $q = 0$ នោះតាមរូបមន្ត (5.1) ផ្តល់ឱ្យ

$$\boxed{\int \log_a x dx = x \log_a x - \frac{x}{\ln a} + c = \frac{x \ln x - x}{\ln a} + c} \quad (5.3)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- ចំពោះ $a = e$ នោះតាមរូបមន្ត (5.1) ផ្តល់ឱ្យ

$$\boxed{\int \ln (p x + q) dx = \frac{(p x + q) \ln (p x + q) - p x}{p} + c = \frac{1}{p} (p x + q) \ln (p x + q) - x + c} \quad (5.4)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ឧទាហរណ៍ទី១ គណនា $\int_1^e \ln x dx$, $\int \log_3 x dx$, $\int_3^4 \ln (2x - 4) dx$ និង $\int \log_5 (7x + 9) dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (5.2), (5.3), (5.4) និង (5.1) យើងបាន៖

ផ្នែកគណិតវិទ្យានិងស្ថិតិ

$$\int_1^e \ln x \, dx = (x \ln x - x) \Big|_1^e = (e \ln e - e) - (1 \cdot \ln 1 - 1) = 0 + 1 = 1$$

$$\int \log_3 x \, dx = x \log_3 x - \frac{x}{\ln 3} + c$$

$$\begin{aligned} \int_3^4 \ln(2x-4) \, dx &= \frac{(2x-4) \ln(2x-4) - 2x}{2} \Big|_3^4 \\ &= \frac{6 \ln 2 - 2}{2} = 3 \ln 2 - 1 \approx 1.0794 \end{aligned}$$

និង $\int \log_5(7x+9) \, dx = \frac{(7x+9)}{7} \log_5(7x+9) - \frac{x}{\ln 5} + c$ ។

ឧទាហរណ៍ទី២ គណនា $I = \int_1^e x \ln x \, dx$ និង $J = \int_1^e x^2 \ln x \, dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

ជាដំបូង យើងគណនា $I = \int_1^e x \ln x \, dx$ ។

យើងយក $u = x$ នាំឱ្យ $du = dx$

និង $dv = \ln x \, dx$ នាំឱ្យ $v = \int dv = \int \ln x \, dx = x \ln x - x$ (តាមរូបមន្ត (5.2)) ។

នាំឱ្យ $I = \int_1^e x \ln x \, dx = \int u \, dv = u v - \int v \, du$

$$= x(x \ln x - x) \Big|_1^e - \int_1^e (x \ln x - x) \, dx$$

$$= e(e \ln e - e) - 1 \cdot (1 \cdot \ln 1 - 1) - \int_1^e x \ln x \, dx + \int_1^e x \, dx$$

$$= 1 - I + \frac{x^2}{2} \Big|_1^e = 1 - I + \frac{1}{2}(e^2 - 1)$$

នាំឱ្យ $2I = 1 + \frac{1}{2}(e^2 - 1) = \frac{e^2 + 1}{2}$

នាំឱ្យ $I = \frac{e^2 + 1}{4} \approx 2.0972$ ។

បន្ទាប់មក យើងគណនា $J = \int_1^e x^2 \ln x \, dx$ ។

យើងយក $u = x^2$ នាំឱ្យ $du = 2x dx$

និង $dv = \ln x dx$ នាំឱ្យ $v = \int dv = \int \ln x dx = x \ln x - x$ (តាមរូបមន្ត (5.2)) ។

$$\begin{aligned} \text{នាំឱ្យ } J &= \int_1^e x^2 \ln x dx = \int u dv = uv - \int v du \\ &= x^2 (x \ln x - x) \Big|_1^e - \int_1^e 2x (x \ln x - x) dx \\ &= e^2 (e \ln e - e) - 1^2 \cdot (1 \cdot \ln 1 - 1) - 2 \int_1^e x^2 \ln x dx + 2 \int_1^e x^2 dx \\ &= 1 - 2J + 2 \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_1^e = 1 - 2J + \frac{2}{3}(e^3 - 1) \end{aligned}$$

$$\text{នាំឱ្យ } 3J = 1 + \frac{2}{3}(e^3 - 1) = \frac{2e^3 + 1}{3}$$

$$\text{នាំឱ្យ } J = \frac{2e^3 + 1}{9} \approx 4.5745 \text{ ។}$$

៥.២ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍លោការីតរាង $\int \log_a |px + q| dx$

អាំងតេក្រាល $\int \log_a |px + q| dx$ ($a > 0, a \neq 1$) ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែល

មានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $\log_a |px + q|$ ($a > 0, a \neq 1$) ជាអនុគមន៍លោការីតដែលកំណត់បានកាលណា $px + q \neq 0$ ។

យើងចាប់ផ្តើមគណនាអាំងតេក្រាល $\int \log_a |px + q| dx$ ដោយសិក្សាពីករណីគឺ

$p = 0$ និង $p \neq 0$ ។

- ករណី $p = 0$ នាំឱ្យ $\int \log_a |px + q| dx = \int \log_a |q| dx = x \log_a |q| + c$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ និង $q \neq 0$ ។

- ករណី $p \neq 0$ និងយើងបន្ថែមលក្ខខណ្ឌ $px + q \neq 0$ ។

+ ចំពោះ $px + q > 0$ នាំឱ្យ $|px + q| = px + q$ និងតាមរូបមន្ត (5.1) ផ្តល់ឱ្យ

$$\int \log_a |px + q| dx = \int \log_a (px + q) dx = \frac{(px + q)}{p} \log_a (px + q) - \frac{x}{\ln a} + c$$

+ ចំពោះ $px + q < 0$ នាំឱ្យ $|px + q| = -(px + q) = (-p)x - q$ និងតាមរូបមន្ត (5.1) ផ្តល់ឱ្យ

$$\begin{aligned} \int \log_a |px + q| dx &= \int \log_a ((-p)x - q) dx = \frac{((-p)x - q)}{(-p)} \log_a ((-p)x - q) - \frac{x}{\ln a} + c \\ &= \frac{(px + q)}{p} \log_a (-(px + q)) - \frac{x}{\ln a} + c \\ &= \frac{(px + q) \ln(-(px + q)) - px}{p \ln a} + c \quad \text{។} \end{aligned}$$

ដូចនេះ បើ $p \neq 0$ និង $px + q \neq 0$ នាំឱ្យយើងបានរូបមន្ត

$$\boxed{\int \log_a |px + q| dx = \frac{(px + q)}{p} \log_a |px + q| - \frac{x}{\ln a} + c = \frac{(px + q) \ln |px + q| - px}{p \ln a} + c} \quad (5.5)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- ចំពោះ $a = e$, $p = 1$ និង $q = 0$ នោះតាមរូបមន្ត (5.5) ផ្តល់ឱ្យ

$$\boxed{\int \ln |x| dx = x \ln |x| - x + c} \quad (5.6)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- ចំពោះ $p = 1$ និង $q = 0$ នោះតាមរូបមន្ត (5.5) ផ្តល់ឱ្យ

$$\boxed{\int \log_a |x| dx = x \log_a |x| - \frac{x}{\ln a} + c = \frac{x \ln |x| - x}{\ln a} + c} \quad (5.7)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- ចំពោះ $a = e$ នោះតាមរូបមន្ត (5.5) ផ្តល់ឱ្យ

$$\boxed{\int \ln |px + q| dx = \frac{(px + q) \ln |px + q| - px}{p} + c = \frac{1}{p} (px + q) \ln |px + q| - x + c} \quad (5.8)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ឧទាហរណ៍ទី៣ គណនា $\int_{-1}^{-e} \ln |x| dx$, $\int \log_7 |x| dx$, $\int_1^2 \ln |3x - 7| dx$ និង

$$\int \log_{11}|3x-7|dx \text{ ។}$$

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (5.6) , (5.7) , (5.8) និង (5.5) យើងបាន៖

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{-e} \ln|x|dx &= (x \ln|x| - x) \Big|_{-1}^{-e} \\ &= (-e \ln|-e| - (-e)) - ((-1) \ln|-1| - (-1)) = - \end{aligned}$$

$$\int \log_7|x|dx = x \log_7|x| - \frac{x}{\ln 7} + c$$

$$\begin{aligned} \int_1^2 \ln|3x-7|dx &= \left(\frac{1}{3}(3x-7) \ln|3x-7| - x \right) \Big|_1^2 \\ &= -2 + \frac{4}{3} \ln 4 + 1 = \frac{4}{3} \ln 4 - 1 \approx 0.8483 \end{aligned}$$

និង $\int \log_{11}|3x-7|dx = \frac{(3x-7)}{3} \log_{11}|3x-7| - \frac{x}{\ln 11} + c \text{ ។}$

ឧទាហរណ៍ទី៤ គណនា $\int \ln \left| 3 - \frac{7}{x} \right| dx$ និង $\int \ln|x(x+3)(5-x)|dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (5.8) និង (5.6) យើងបាន៖

$$\begin{aligned} \int \ln \left| 3 - \frac{7}{x} \right| dx &= \int (\ln|3x-7| - \ln|x|) dx \\ &= \left(\frac{1}{3}(3x-7) \ln|3x-7| - x \right) - (x \ln|x| - x) + c \\ &= \frac{1}{3}(3x-7) \ln|3x-7| - x \ln|x| + c \end{aligned}$$

និង $\int \ln|x(x+3)(5-x)|dx = \int (\ln|x| + \ln|x+3| + \ln|x-5|) dx$

$$\begin{aligned} &= (x \ln|x| - x) + ((x+3) \ln|x+3| - x) + ((x-5) \ln|x-5| - x) + c \\ &= x \ln|x| + (x+3) \ln|x+3| + (x-5) \ln|x-5| - 3x + c \text{ ។} \end{aligned}$$

៥.៣ អាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍លោការីតរាង $\int \log_a^2(px+q) dx$

អាំងតេក្រាល $\int \log_a^2(px+q) dx$ ($a > 0$, $a \neq 1$) ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់

ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $\log_a^2(px+q) = [\log_a(px+q)]^2$ ($a > 0$, $a \neq 1$) ។

អនុគមន៍នេះមានអនុគមន៍លោការីត $\log_a(px+q)$ និងវាកំណត់បានកាលណា

$$px+q > 0 \text{ ។}$$

យើងចាប់ផ្តើមគណនាអាំងតេក្រាល $\int \log_a^2(px+q) dx$ ដោយសិក្សាពីករណីគឺ

$$p=0 \text{ និង } p \neq 0 \text{ ។}$$

$$\text{- ករណី } p=0 \text{ នាំឱ្យ } \int \log_a^2(px+q) dx = \int \log_a^2 q dx = x \log_a^2 q + c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ និង $q > 0$ ។

- ករណី $p \neq 0$ យើងប្រើវិធីអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក

$$\text{ដោយយក } u = \log_a^2(px+q) = \frac{\ln^2(px+q)}{\ln^2 a} \text{ នាំឱ្យ } du = \frac{2p \ln(px+q) dx}{(px+q) \ln^2 a}$$

$$\text{និង } dv = dx \text{ នាំឱ្យ } v = x \text{ ។}$$

$$\text{នាំឱ្យ } \int \log_a^2(px+q) dx = \int u dv = uv - \int v du$$

$$= x \log_a^2(px+q) - \frac{2p}{\ln^2 a} \int \frac{x \ln(px+q)}{(px+q)} dx$$

$$= x \log_a^2(px+q) - \frac{2}{\ln^2 a} \int \frac{[(px+q)-q] \ln(px+q)}{(px+q)} dx$$

$$= x \log_a^2(px+q) - \frac{2}{\ln^2 a} \int \ln(px+q) dx - \frac{2(-q)}{\ln^2 a} \int \frac{\ln(px+q)}{px+q} dx$$

$$= x \log_a^2(px+q) - \frac{2}{\ln^2 a} \left[\frac{1}{p} (px+q) \ln|px+q| - x \right] + \frac{2q}{p \ln^2 a} \int \ln(px+q) d[\ln(px+q)]$$

$$= x \log_a^2(px+q) - \frac{2}{p \ln^2 a} (px+q) \ln|px+q| + \frac{2x}{\ln^2 a} + \frac{q}{p \ln^2 a} \ln^2(px+q) + c$$

$$= x \log_a^2(px+q) - \frac{2}{p \ln a} (px+q) \log_a(px+q) + \frac{2x}{\ln^2 a} + \frac{q}{p} \log_a^2(px+q) + c$$

$$= \frac{(px+q)}{p} \log_a^2(px+q) - \frac{2(px+q)}{p \ln a} \log_a(px+q) + \frac{2x}{\ln^2 a} + c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ និង $px+q > 0$ ។

ដូចនេះ បើ $p \neq 0$ និង $px+q > 0$ នាំឱ្យយើងបានរូបមន្ត

$$\int \log_a^2(px+q) dx = \frac{(px+q)}{p} \log_a^2(px+q) - \frac{2(px+q)}{p \ln a} \log_a(px+q) + \frac{2x}{\ln^2 a} + c \quad (5.9)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ និង $px+q > 0$ ។

- ចំពោះ $a=e$, $p=1$ និង $q=0$ នោះតាមរូបមន្ត (5.9) ផ្តល់ឱ្យ

$$\int \ln^2 x dx = x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + c \quad (5.10)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- ចំពោះ $p=1$ និង $q=0$ នោះតាមរូបមន្ត (5.9) ផ្តល់ឱ្យ

$$\int \log_a^2 x dx = x \log_a^2 x - \frac{2x}{\ln a} \log_a x + \frac{2x}{\ln^2 a} + c \quad (5.11)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- ចំពោះ $a=e$ នោះតាមរូបមន្ត (5.9) ផ្តល់ឱ្យ

$$\int \ln^2(px+q) dx = \frac{(px+q)}{p} \ln^2(px+q) - \frac{2(px+q)}{p} \ln(px+q) + 2x + c \quad (5.12)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ឧទាហរណ៍ទី៥ គណនា $\int_1^e \ln^2 x dx$, $\int \log_3^2 x dx$, $\int_3^4 \ln^2(2x-4) dx$ និង

$$\int \log_5^2(7x+9) dx \quad \text{។}$$

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (5.10), (5.11), (5.12) និង (5.9) យើងបាន៖

$$\begin{aligned} \int_1^e \ln^2 x dx &= \left(x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x \right) \Big|_1^e \\ &= \left(e \ln^2 e - 2e \ln e + 2e \right) - \left(1 \cdot \ln^2 1 - 2 \cdot 1 \cdot \ln 1 + 2 \cdot 1 \right) \end{aligned}$$

$$= e - 2 \approx 0.7182$$

$$\int \log_3^2 x \, dx = x \log_3^2 x - \frac{2x}{\ln 3} \log_3 x + \frac{2x}{\ln^2 3} + c$$

$$\int_3^4 \ln^2(2x-4) \, dx = \left[\frac{(2x-4)}{2} \ln^2(2x-4) - \frac{2(2x-4)}{2} \ln(2x-4) + 2x \right] \Big|_3^4$$

$$= 7 \ln^2 2 - 6 \ln 2 + 2 \approx 1.2042$$

និង $\int \log_5^2(7x+9) \, dx = \frac{1}{7}(7x+9) \log_5^2(7x+9)$

$$- \frac{2(7x+9)}{7 \ln 5} \log_5(7x+9) + \frac{2x}{\ln^2 5} + c \quad \text{។}$$

៥.៤ អាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍លោការីតរាង $\int \log_a^2 |px+q| \, dx$

អាំងតេក្រាល $\int \log_a^2 |px+q| \, dx$ ($a > 0$, $a \neq 1$) ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់

ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $\log_a^2 |px+q| = [\log_a |px+q|]^2$ ($a > 0$, $a \neq 1$) ។

អនុគមន៍នេះមានអនុគមន៍លោការីត $\log_a |px+q|$ និងវាកំណត់បានកាលណា $px+q \neq 0$ ។

យើងចាប់ផ្តើមគណនាអាំងតេក្រាល $\int \log_a^2 |px+q| \, dx$ ដោយសិក្សាពីករណីគឺ

$p=0$ និង $p \neq 0$ ។

- ករណី $p=0$ នាំឱ្យ $\int \log_a^2 |px+q| \, dx = \int \log_a^2 |q| \, dx = x \log_a^2 |q| + c$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ និង $q \neq 0$ ។

- ករណី $p \neq 0$ និងយើងបន្ថែមលក្ខខណ្ឌ $px+q \neq 0$ ។

+ ចំពោះ $px+q > 0$ នាំឱ្យ $|px+q| = px+q$ និងតាមរូបមន្ត (5.9) ផ្តល់ឱ្យ

$$\int \log_a^2 |px+q| \, dx = \int \log_a^2 (px+q) \, dx$$

$$= \frac{(px+q)}{p} \log_a^2 (px+q) - \frac{2(px+q)}{p \ln a} \log_a (px+q) + \frac{2x}{\ln^2 a} + c \quad \text{។}$$

+ ចំពោះ $px + q < 0$ នាំឱ្យ $|px + q| = -(px + q) = (-p)x - q$ និងតាមរូបមន្ត (5.9) ផ្តល់ឱ្យ

$$\begin{aligned}\int \log_a^2 |px + q| dx &= \int \log_a^2 ((-p)x - q) dx \\ &= \frac{((-p)x - q)}{(-p)} \log_a^2 ((-p)x - q) - \frac{2((-p)x - q)}{(-p) \ln a} \log_a ((-p)x - q) + \frac{2x}{\ln^2 a} + c \\ &= \frac{(px + q)}{p} \log_a^2 (-(px + q)) - \frac{2(px + q)}{p \ln a} \log_a (-(px + q)) + \frac{2x}{\ln^2 a} + c \quad \text{។}\end{aligned}$$

ដូចនេះ បើ $p \neq 0$ និង $px + q \neq 0$ នាំឱ្យយើងបានរូបមន្ត

$$\boxed{\int \log_a^2 |px + q| dx = \frac{(px + q)}{p} \log_a^2 |px + q| - \frac{2(px + q)}{p \ln a} \log_a |px + q| + \frac{2x}{\ln^2 a} + c} \quad (5.13)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- ចំពោះ $a = e$, $p = 1$ និង $q = 0$ នោះតាមរូបមន្ត (5.13) ផ្តល់ឱ្យ

$$\boxed{\int \ln^2 |x| dx = x \ln^2 |x| - 2x \ln |x| + 2x + c} \quad (5.14)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- ចំពោះ $p = 1$ និង $q = 0$ នោះតាមរូបមន្ត (5.13) ផ្តល់ឱ្យ

$$\boxed{\int \log_a^2 |x| dx = x \log_a^2 |x| - \frac{2x}{\ln a} \log_a |x| + \frac{2x}{\ln^2 a} + c} \quad (5.15)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- ចំពោះ $a = e$ នោះតាមរូបមន្ត (5.13) ផ្តល់ឱ្យ

$$\boxed{\int \ln^2 |px + q| dx = \frac{(px + q)}{p} \ln^2 |px + q| - \frac{2(px + q)}{p} \ln |px + q| + 2x + c} \quad (5.16)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ឧទាហរណ៍ទី៦ គណនា $\int_{-e}^{-1} \ln^2|x|dx$, $\int \log_5^2|x|dx$, $\int_3^4 \ln^2|2-3x|dx$ និង

$$\int \log_7^2|4x-5|dx \text{ ។}$$

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (5.14) , (5.15) , (5.16) និង (5.13) យើងបាន៖

$$\begin{aligned} \int_{-e}^{-1} \ln^2|x|dx &= \left(x \ln^2|x| - 2x \ln|x| + 2x \right) \Big|_{-e}^{-1} \\ &= \left((-1) \ln^2|-1| - 2(-1) \ln|-1| + 2(-1) \right) - \left((-e) \ln^2|-e| - 2(-e) \ln|-e| + 2(-e) \right) \\ &= e - 2 \approx 0.7182 \end{aligned}$$

$$\int \log_5^2|x|dx = x \log_5^2|x| - \frac{2x}{\ln 5} \log_5|x| + \frac{2x}{\ln^2 5} + c$$

$$\begin{aligned} \int_3^4 \ln^2|2-3x|dx &= \int_3^4 \ln^2|3x-2|dx \\ &= \left[\frac{(3x-2)}{3} \ln^2|3x-2| - \frac{2(3x-2)}{3} \ln|3x-2| + 2x \right] \Big|_3^4 \\ &= \frac{10}{3} \ln^2 10 - \frac{7}{3} \ln^2 7 - \frac{20}{3} \ln 10 + \frac{14}{3} \ln 7 + 2 \approx 4.5680 \end{aligned}$$

$$\text{និង } \int \log_7^2|4x-5|dx = \frac{(4x-5)}{4} \log_7^2|4x-5| - \frac{2(4x-5)}{4 \ln 7} \log_7|4x-5| + \frac{2x}{\ln^2 7} + c \text{ ។}$$

៥.៥ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍លោការីតរាង $\int \log_a(x^2 + b^2)dx$

អាំងតេក្រាល $\int \log_a(x^2 + b^2)dx$ ($a > 0$, $a \neq 1$) ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែល

មានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $\log_a(x^2 + b^2)$ ($a > 0$, $a \neq 1$) ។ អនុគមន៍នេះ ជាអនុគមន៍លោការីតដែលកំណត់លើ $\mathbb{R}$ កាលណា $b \neq 0$ ។

យើងចាប់ផ្តើមគណនាអាំងតេក្រាល $\int \log_a(x^2 + b^2)dx$ ដោយសិក្សាពីករណីគឺ

$b = 0$ និង $b \neq 0$ ។

- ករណី $b = 0$ នាំឱ្យ

$$\begin{aligned}\int \log_a(x^2 + b^2) dx &= \int \log_a(x^2) dx = 2 \int \log_a(x) dx \\ &= 2 \left(x \log_a x - \frac{x}{\ln a} \right) + c = 2x \log_a x - \frac{2x}{\ln a} + c\end{aligned}$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- ករណី $b \neq 0$ យើងប្រើវិធីអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក

$$\text{ដោយយក } u = \log_a(x^2 + b^2) = \frac{\ln(x^2 + b^2)}{\ln a} \text{ នាំឱ្យ } du = \frac{2x dx}{(x^2 + b^2) \ln a}$$

$$\text{និង } dv = dx \text{ នាំឱ្យ } v = x \text{ ។}$$

$$\begin{aligned}\text{នាំឱ្យ } \int \log_a(x^2 + b^2) dx &= \int u dv = u v - \int v du \\ &= x \log_a(x^2 + b^2) - \frac{2}{\ln a} \int \frac{x^2}{(x^2 + b^2)} dx \\ &= x \log_a(x^2 + b^2) - \frac{2}{\ln a} \int \frac{(x^2 + b^2) - b^2}{(x^2 + b^2)} dx \\ &= x \log_a(x^2 + b^2) - \frac{2}{\ln a} \int \left(1 - \frac{b^2}{x^2 + b^2} \right) dx \\ &= x \log_a(x^2 + b^2) - \frac{2}{\ln a} \left[x - b^2 \cdot \frac{1}{b} \tan^{-1} \left(\frac{x}{b} \right) \right] + c \\ &= x \log_a(x^2 + b^2) - \frac{2x}{\ln a} + \frac{2b}{\ln a} \tan^{-1} \left(\frac{x}{b} \right) + c\end{aligned}$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ដូចនេះ បើ $b \neq 0$ នាំឱ្យយើងបានរូបមន្ត

$$\boxed{\int \log_a(x^2 + b^2) dx = x \log_a(x^2 + b^2) - \frac{2x}{\ln a} + \frac{2b}{\ln a} \tan^{-1} \left(\frac{x}{b} \right) + c} \quad (5.17)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- ចំពោះ $a = e$ នោះតាមរូបមន្ត (5.17) ផ្តល់ឱ្យ

$$\boxed{\int \ln(x^2 + b^2) dx = x \ln(x^2 + b^2) - 2x + 2b \tan^{-1} \left(\frac{x}{b} \right) + c} \quad (5.18)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ឧទាហរណ៍ទី៧ គណនា $\int_1^3 \ln(x^2 + 5)dx$, $\int \log_3(x^2 + 16)dx$ និង $\int_0^2 \log_5(6x^2 + 25)dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (5.18) និង (5.17) យើងបាន៖

$$\begin{aligned} \int_1^3 \ln(x^2 + 5)dx &= \left(x \ln(x^2 + 5) - 2x + 2\sqrt{5} \tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right) \right) \Big|_1^3 \\ &= \left(3\ln 14 - 6 + 2\sqrt{5} \tan^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right) \right) - \left(\ln 6 - 2 + 2\sqrt{5} \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \right) \end{aligned}$$

$$\int \log_3(x^2 + 16)dx = x \log_3(x^2 + 16) - \frac{2x}{\ln 3} + \frac{8}{\ln 3} \tan^{-1}\left(\frac{x}{4}\right) + c$$

$$\begin{aligned} \text{និង } \int_0^2 \log_5(6x^2 + 25)dx &= \int_0^2 \log_5[6(x^2 + 25/6)]dx \\ &= \int_0^2 \left[\log_5 6 + \log_5(x^2 + 25/6) \right] dx \\ &= \left(x \log_5 6 + x \log_5(x^2 + 25/6) - \frac{2x}{\ln 5} + \frac{10}{\sqrt{6} \ln 5} \tan^{-1}\left(\frac{x\sqrt{6}}{5}\right) \right) \Big|_0^2 \\ &= 2\log_5 6 + 2\log_5(49/6) - \frac{4}{\ln 5} + \frac{10}{\sqrt{6} \ln 5} \tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{6}}{5}\right) \approx 4.3172 \quad \text{។} \end{aligned}$$

៥.៦ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍លោការីតរាង $\int \log_a(x^2 - b^2)dx$

អាំងតេក្រាល $\int \log_a(x^2 - b^2)dx$ ($a > 0, a \neq 1$) ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែល

មានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $\log_a(x^2 - b^2)$ ($a > 0, a \neq 1$) ។ អនុគមន៍នេះ ជាអនុគមន៍លោការីតដែលកំណត់លើ $x^2 - b^2 > 0 \Leftrightarrow x < -|b| \vee x > |b|$ កាលណា $b \neq 0$ ។

យើងចាប់ផ្តើមគណនាអាំងតេក្រាល $\int \log_a(x^2 - b^2)dx$ ដោយសិក្សាពីករណីគឺ

$b = 0$ និង $b \neq 0$ ។

- ករណី $b = 0$ នាំឱ្យ

$$\begin{aligned}\int \log_a(x^2 - b^2) dx &= \int \log_a(x^2) dx = 2 \int \log_a(x) dx \\ &= 2 \left(x \log_a x - \frac{x}{\ln a} \right) + c = 2x \log_a x - \frac{2x}{\ln a} + c\end{aligned}$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- ករណី $b \neq 0$ យើងប្រើវិធីអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក

ដោយយក $u = \log_a(x^2 - b^2) = \frac{\ln(x^2 - b^2)}{\ln a}$ នាំឱ្យ $du = \frac{2x dx}{(x^2 - b^2) \ln a}$

និង $dv = dx$ នាំឱ្យ $v = x$ ។

$$\begin{aligned}\text{នាំឱ្យ } \int \log_a(x^2 - b^2) dx &= \int u dv = u v - \int v du \\ &= x \log_a(x^2 - b^2) - \frac{2}{\ln a} \int \frac{x^2}{(x^2 - b^2)} dx \\ &= x \log_a(x^2 - b^2) - \frac{2}{\ln a} \int \frac{(x^2 - b^2) + b^2}{(x^2 - b^2)} dx \\ &= x \log_a(x^2 - b^2) - \frac{2}{\ln a} \int \left(1 + \frac{b^2}{x^2 - b^2} \right) dx \\ &= x \log_a(x^2 - b^2) - \frac{2}{\ln a} \left[x + b^2 \cdot \frac{1}{2b} \ln \left| \frac{x-b}{x+b} \right| \right] + c \\ &= x \log_a(x^2 - b^2) - \frac{2x}{\ln a} + \frac{b}{\ln a} \ln \left| \frac{x+b}{x-b} \right| + c \\ &= x \log_a(x^2 - b^2) - \frac{2x}{\ln a} + b \log_a \left| \frac{x+b}{x-b} \right| + c\end{aligned}$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ដូចនេះ បើ $b \neq 0$ នាំឱ្យយើងបានរូបមន្ត

$$\boxed{\int \log_a(x^2 - b^2) dx = x \log_a(x^2 - b^2) - \frac{2x}{\ln a} + b \log_a \left| \frac{x+b}{x-b} \right| + c} \quad (5.19)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- ចំពោះ $a = e$ នោះតាមរូបមន្ត (5.19) ផ្តល់ឱ្យ

$$\int \ln(x^2 - b^2) dx = x \ln(x^2 - b^2) - 2x + b \ln \left| \frac{x+b}{x-b} \right| + c \quad (5.20)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ឧទាហរណ៍ទី៨ គណនា $\int_3^5 \ln(x^2 - 4) dx$, $\int \log_3(x^2 - 9) dx$ និង $\int_{-4}^{-2} \log_5(9x^2 - 16) dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (5.20) និង (5.19) យើងបាន៖

$$\begin{aligned} \int_3^5 \ln(x^2 - 4) dx &= \left(x \ln(x^2 - 4) - 2x + 2 \ln \left| \frac{x+2}{x-2} \right| \right) \Big|_3^5 \\ &= \left(5 \ln 21 - 10 + 2 \ln \left| \frac{7}{3} \right| \right) - \left(3 \ln 5 - 6 + 2 \ln \left| \frac{5}{1} \right| \right) \\ &= 5 \ln 21 - 3 \ln 5 - 4 + 2 \ln \frac{7}{15} \approx 4.8700 \end{aligned}$$

$$\int \log_3(x^2 - 9) dx = x \log_3(x^2 - 9) - \frac{2x}{\ln 3} + 3 \log_3 \left| \frac{x+3}{x-3} \right| + c$$

$$\begin{aligned} \text{និង } \int_{-4}^{-2} \log_5(9x^2 - 16) dx &= \int_{-4}^{-2} \log_5[9(x^2 - 16/9)] dx \\ &= \int_{-4}^{-2} \left[\log_5 9 + \log_5(x^2 - 16/9) \right] dx \\ &= \left(x \log_5 9 + x \log_5(x^2 - 16/9) - \frac{2x}{\ln 5} + \frac{4}{3} \log_5 \left| \frac{x+4/3}{x-4/3} \right| \right) \Big|_{-4}^{-2} \\ &\quad - \left(-4 \log_5 9 - 4 \log_5 \frac{128}{9} + \frac{8}{\ln 5} + \frac{4}{3} \log_5 \frac{1}{2} \right) \\ &= 2 \log_5 9 - 2 \log_5 \frac{20}{9} + 4 \log_5 \frac{128}{9} - \frac{4}{\ln 5} + \frac{4}{3} \log_5 \frac{2}{5} \approx 5.0917 \quad \text{។} \end{aligned}$$

ឧទាហរណ៍ទី៩ គណនា $\int \log_2(x^3 - 1) dx$ និង $\int \log_4(x^4 - 1) dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

$$\text{យើងមាន } x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1) = (x - 1) \left[(x + 1/2)^2 + 3/4 \right]$$

$$\text{និង } x^4 - 1 = (x^2)^2 - 1^2 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) \quad \text{។}$$

តាមរូបមន្ត (5.1) , (5.17) និង (5.19) យើងបាន៖

$$\begin{aligned}
 \int \log_2 (x^3 - 1) dx &= \int \log_2 [(x-1)(x^2 + x + 1)] dx \\
 &= \int \log_2 (x-1) dx + \int \log_2 (x^2 + x + 1) dx \\
 &= \int \log_2 (x-1) dx + \int \log_2 \left((x+1/2)^2 + 3/4 \right) d(x+1/2) \\
 &= (x-1) \log_2 (x-1) - \frac{x}{\ln 2} + (x+1/2) \log_2 \left((x+1/2)^2 + 3/4 \right) \\
 &\quad - \frac{2(x+1/2)}{\ln 2} + \frac{2(\sqrt{3}/2)}{\ln 2} \tan^{-1} \left(\frac{x+1/2}{\sqrt{3}/2} \right) + c \\
 &= (x-1) \log_2 (x-1) - \frac{3x}{\ln 2} + \frac{1}{2} (2x+1) \log_2 (x^2 + x + 1) + \frac{\sqrt{3}}{\ln 2} \tan^{-1} \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) + c_1
 \end{aligned}$$

និង $\int \log_4 (x^4 - 1) dx = \int \log_4 [(x^2 - 1)(x^2 + 1)] dx$

$$\begin{aligned}
 &= \int \log_4 (x^2 - 1) dx + \int \log_4 (x^2 + 1) dx \\
 &= x \log_4 (x^2 - 1) - \frac{2x}{\ln 4} + \log_4 \left| \frac{x+1}{x-1} \right| \\
 &\quad + x \log_4 (x^2 + 1) - \frac{2x}{\ln 4} + \frac{2}{\ln 4} \tan^{-1} x + c \\
 &= x \log_4 (x^4 - 1) - \frac{4x}{\ln 4} + \log_4 \left| \frac{x+1}{x-1} \right| + \frac{2}{\ln 4} \tan^{-1} x + c \quad \text{។}
 \end{aligned}$$

ឧទាហរណ៍ទី១០ គណនា $\int \log_7 (x^8 - 1) dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $x^8 - 1 = (x^4)^2 - 1^2 = (x^4 - 1)(x^4 + 1)$

$$\begin{aligned}
 &= (x^2 - 1)(x^2 + 1) [(x^4 + 2x^2 + 1) - 2x^2] \\
 &= (x^2 - 1)(x^2 + 1) [(x^2 + 1)^2 - (x\sqrt{2})^2] \\
 &= (x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^2 + 1 - x\sqrt{2})(x^2 + 1 + x\sqrt{2}) \\
 &= (x^2 - 1)(x^2 + 1) \left((x - \sqrt{2}/2)^2 + 1/2 \right) \left((x + \sqrt{2}/2)^2 + 1/2 \right) \text{។}
 \end{aligned}$$

តាមរូបមន្ត (5.17) និង (5.19) យើងបាន៖

$$\begin{aligned}
 \int \log_7(x^8 - 1) dx &= \int \log_7 \left[(x^2 - 1)(x^2 + 1) \left((x - \sqrt{2}/2)^2 + 1/2 \right) \left((x + \sqrt{2}/2)^2 + 1/2 \right) \right] dx \\
 &= \int \log_7(x^2 - 1) dx + \int \log_7(x^2 + 1) dx \\
 &\quad + \int \log_7 \left((x - \sqrt{2}/2)^2 + 1/2 \right) dx + \int \log_7 \left((x + \sqrt{2}/2)^2 + 1/2 \right) dx \\
 &= x \log_7(x^2 - 1) - \frac{2x}{\ln 7} + \log_7 \left| \frac{x+1}{x-1} \right| + x \log_7(x^2 + 1) - \frac{2x}{\ln 7} + \frac{2}{\ln 7} \tan^{-1} x \\
 &\quad + (x - \sqrt{2}/2) \log_7 \left((x - \sqrt{2}/2)^2 + 1/2 \right) - \frac{2(x - \sqrt{2}/2)}{\ln 7} + \frac{2(\sqrt{2}/2)}{\ln 7} \tan^{-1} \left(\frac{(x - \sqrt{2}/2)}{\sqrt{2}/2} \right) \\
 &\quad + (x + \sqrt{2}/2) \log_7 \left((x + \sqrt{2}/2)^2 + 1/2 \right) - \frac{2(x + \sqrt{2}/2)}{\ln 7} + \frac{2(\sqrt{2}/2)}{\ln 7} \tan^{-1} \left(\frac{(x + \sqrt{2}/2)}{\sqrt{2}/2} \right) + c \\
 &= x \log_7(x^4 - 1) - \frac{4x}{\ln 7} + \log_7 \left| \frac{x+1}{x-1} \right| + \frac{2}{\ln 7} \tan^{-1} x \\
 &\quad + \frac{1}{2} (2x - \sqrt{2}) \log_7(x^2 - x\sqrt{2} + 1) - \frac{4x}{\ln 7} + \frac{\sqrt{2}}{\ln 7} \tan^{-1} \left(\frac{2x - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} (2x + \sqrt{2}) \log_7(x^2 + x\sqrt{2} + 1) + \frac{\sqrt{2}}{\ln 7} \tan^{-1} \left(\frac{2x + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) + c \quad \text{។}
 \end{aligned}$$

ជាសរុប ជំពូកទី៥នេះបានផ្តល់នូវវិធីសាស្ត្រគណនាអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍លោការីតនិងអាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍លោការីតមួយចំនួនដូចជា $\int \log_a(px + q) dx$,

$$\int \log_a |px + q| dx, \int \log_a^2(px + q) dx, \int \log_a^2 |px + q| dx, \int \log_a(x^2 + b^2) dx$$

និង $\int \log_a(x^2 - b^2) dx$ ដោយបង្កើតជារូបមន្តដើម្បីយកមកប្រើប្រាស់ជាលក្ខណៈទូទៅ

និងបានអនុវត្តន៍លើឧទាហរណ៍មួយចំនួន។ បន្ទាប់មក យើងនឹងបង្ហាញនិងសិក្សាអំពីប្រភេទអាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍អ៊ីចស្ត្រូណង់ស្យែលនិងអនុគមន៍ស្វ័យគុណនៅក្នុងជំពូកទី៦បន្តទៀត។

ជំពូកទី៦

ប្រភេទអាំងតេក្រាលមាន

អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនិងអនុគមន៍ស្វ័យគុណ

(Types of Integrals Involving Exponential and Power Functions)

នៅក្នុងជំពូកទី៦នេះ យើងនឹងសិក្សាតែអំពីប្រភេទអាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនិងអនុគមន៍ស្វ័យគុណដែលមានលក្ខណៈពិសេសមួយចំនួននិងដំណោះស្រាយរបស់វាដូចតទៅ៖

៦.១ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមានរាង $\int x e^{\alpha x} dx$ និង $\int x a^{\alpha x} dx$

អាំងតេក្រាល $\int x e^{\alpha x} dx$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $x e^{\alpha x}$ ជាអនុគមន៍ចម្រុះដែលក្នុងនោះមានអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនិងអនុគមន៍ស្វ័យគុណ។

យើងនឹងគណនាអាំងតេក្រាល $\int x e^{\alpha x} dx$ តាមការសិក្សាពីករណីគឺ $\alpha = 0$ និង $\alpha \neq 0$ ។

- ករណី $\alpha = 0$ នាំឱ្យ

$$\int x e^{\alpha x} dx = \int x e^{0 \cdot x} dx = \int x dx = \frac{x^2}{2} + c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- ករណី $\alpha \neq 0$ នោះយើងប្រើវិធីអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក ដោយយក $u = x$ នាំឱ្យ

$$du = dx \text{ និង } dv = e^{\alpha x} dx \text{ នាំឱ្យ } v = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} \text{ ។}$$

$$\text{នាំឱ្យ } \int x e^{\alpha x} dx = \frac{x}{\alpha} e^{\alpha x} - \frac{1}{\alpha} \int e^{\alpha x} dx$$

$$= \frac{x}{\alpha} e^{\alpha x} - \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} + c = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2} (\alpha x - 1) + c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ដូចនេះ យើងបានរូបមន្ត

$$\int x e^{\alpha x} dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2} (\alpha x - 1) + c \quad (6.1)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

បន្ទាប់មក យើងនឹងគណនាអាំងតេក្រាល $\int x a^{\alpha x} dx$ ។

តាមរូបមន្ត (6.1) យើងទាញបាន៖

$$\begin{aligned} \int x a^{\alpha x} dx &= \int x (e^{\ln a})^{\alpha x} dx = \int x e^{(\alpha \ln a)x} dx \\ &= \frac{e^{(\alpha \ln a)x}}{(\alpha \ln a)^2} ((\alpha \ln a)x - 1) + c \\ &= \frac{a^{\alpha x}}{\alpha^2 \ln^2 a} (\alpha x \ln a - 1) + c \end{aligned}$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ និង $a > 0, a \neq 1$ ។

ដូចនេះ យើងបានរូបមន្ត

$$\int x a^{\alpha x} dx = \frac{a^{\alpha x}}{\alpha^2 \ln^2 a} (\alpha x \ln a - 1) + c \quad (6.2)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ និង $a > 0, a \neq 1$ ។

ឧទាហរណ៍ទី១ គណនា $\int x e^{3x} dx$, $\int (2x+5)e^{2x-7} dx$ និង $\int x 5^{3x+4} dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (6.1) និង (6.2) យើងបាន៖

$$\int x e^{3x} dx = \frac{e^{3x}}{3^2} (3x - 1) + c = \frac{e^{3x}}{9} (3x - 1) + c$$

$$\int (2x+5)e^{2x-7} dx = e^{-7} \int (2x+5)e^{2x} dx$$

$$\begin{aligned}
&= 2e^{-7} \int x e^{2x} dx + 5e^{-7} \int e^{2x} dx \\
&= 2e^{-7} \cdot \frac{e^{2x}}{2^2} (2x-1) + 5e^{-7} \cdot \frac{1}{2} e^{2x} + c \\
&= \frac{e^{2x-7}}{2} (2x-1) + \frac{5e^{2x-7}}{2} + c \\
&= \frac{e^{2x-7}}{2} (2x+4) + c
\end{aligned}$$

និង $\int x 5^{3x+4} dx = 5^4 \int x 5^{3x} dx = 5^4 \cdot \frac{5^{3x}}{3^2 \ln^2 5} (3x \ln 5 - 1) + c$

$$= \frac{5^{3x+4}}{9 \ln^2 5} (3x \ln 5 - 1) + c \quad \text{។}$$

ឧទាហរណ៍ទី២ គណនា $\int_0^1 x e^{2x+3} dx$ និង $\int_0^{+\infty} x 3^{-4x} dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (6.1) និង (6.2) យើងបាន៖

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x e^{2x+3} dx &= \frac{e^{2x}}{2^2} (2x-1) \Big|_0^1 \\
&= \frac{e^{2 \cdot 1}}{2^2} (2 \cdot 1 - 1) - \frac{e^{2 \cdot 0}}{2^2} (2 \cdot 0 - 1) = \frac{e^2 + 1}{4}
\end{aligned}$$

និង $\int_0^{+\infty} x 3^{-4x} dx = \frac{3^{-4x}}{(-4)^2 \ln^2 3} ((-4)x \ln 3 - 1) \Big|_0^{+\infty}$

$$= 0 - \frac{(-4 \cdot 0 \cdot \ln 3 - 1)}{16 \ln^2 3 \times 3^0} = \frac{1}{16 \ln^2 3} \quad \text{។}$$

៦.២ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមានរាង $\int x^2 e^{\alpha x} dx$ និង $\int x^2 a^{\alpha x} dx$

អាំងតេក្រាល $\int x^2 e^{\alpha x} dx$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេ

ក្រាល $x^2 e^{\alpha x}$ ជាអនុគមន៍ចម្រុះដែលក្នុងនោះមានអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនិងអនុគមន៍ស្វ័យគុណ។

យើងនឹងគណនាអាំងតេក្រាល $\int x^2 e^{\alpha x} dx$ តាមការសិក្សាពីករណីគឺ $\alpha = 0$ និង

$\alpha \neq 0$ ។

- ករណី $\alpha = 0$ នាំឱ្យ

$$\int x^2 e^{\alpha x} dx = \int x^2 e^{0 \cdot x} dx = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- ករណី $\alpha \neq 0$ នោះយើងប្រើវិធីអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក ដោយយក $u = x^2$ នាំឱ្យ

$$du = 2x dx \text{ និង } dv = e^{\alpha x} dx \text{ នាំឱ្យ } v = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} \text{ ។}$$

$$\begin{aligned} \text{នាំឱ្យ } \int x^2 e^{\alpha x} dx &= \frac{x^2}{\alpha} e^{\alpha x} - \frac{2}{\alpha} \int x e^{\alpha x} dx \\ &= \frac{x^2}{\alpha} e^{\alpha x} - \frac{2}{\alpha} \cdot \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2} (\alpha x - 1) + c \\ &= \frac{\alpha^2 x^2}{\alpha^3} e^{\alpha x} - \frac{2e^{\alpha x}}{\alpha^3} (\alpha x - 1) + c \\ &= \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^3} (\alpha^2 x^2 - 2\alpha x + 2) + c \end{aligned}$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ដូចនេះ យើងបានរូបមន្ត

$$\boxed{\int x^2 e^{\alpha x} dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^3} (\alpha^2 x^2 - 2\alpha x + 2) + c} \quad (6.3)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

បន្ទាប់មក យើងនឹងគណនាអាំងតេក្រាល $\int x^2 a^{\alpha x} dx$ ។

តាមរូបមន្ត (6.3) យើងទាញបាន៖

$$\begin{aligned} \int x^2 a^{\alpha x} dx &= \int x^2 (e^{\ln a})^{\alpha x} dx = \int x^2 e^{(\alpha \ln a)x} dx \\ &= \frac{e^{(\alpha \ln a)x}}{(\alpha \ln a)^3} ((\alpha \ln a)^2 x^2 - 2(\alpha \ln a)x + 2) + c \end{aligned}$$

$$= \frac{a^{\alpha x}}{\alpha^3 \ln^3 a} (\alpha^2 \ln^2 a x^2 - 2\alpha x \ln a + 2) + c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ និង $a > 0, a \neq 1$ ។

ដូចនេះ យើងបានរូបមន្ត

$$\int x^2 a^{\alpha x} dx = \frac{a^{\alpha x}}{\alpha^3 \ln^3 a} (\alpha^2 \ln^2 a x^2 - 2\alpha x \ln a + 2) + c \quad (6.4)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ និង $a > 0, a \neq 1$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៣ គណនា $\int x^2 e^{2x} dx$, $\int (3x^2 - 5)e^{4x-3} dx$ និង $\int x^2 3^{4x+7} dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (6.3) និង (6.4) យើងបាន៖

$$\int x^2 e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2^3} (2^2 x^2 - 2 \cdot 2x + 2) + c$$

$$= \frac{e^{2x}}{8} (4x^2 - 4x + 2) + c$$

$$\int (3x^2 - 5)e^{4x-3} dx = 3 \int x^2 e^{4x-3} dx - 5 \int e^{4x-3} dx$$

$$= 3e^{-3} \int x^2 e^{4x} dx - 5e^{-3} \int e^{4x} dx$$

$$= 3e^{-3} \cdot \frac{e^{4x}}{4^3} (4^2 x^2 - 2 \cdot 4x + 2) - 5e^{-3} \cdot \frac{1}{4} e^{4x} + c$$

$$= \frac{e^{4x-3}}{64} (48x^2 - 24x - 74) + c$$

និង $\int x^2 3^{4x+7} dx = 3^7 \int x^2 3^{4x} dx$

$$= 3^7 \cdot \frac{3^{4x}}{4^3 \ln^3 3} (4^2 \ln^2 3 x^2 - 2 \cdot 4x \ln 3 + 2) + c$$

$$= \frac{3^{4x+7}}{64 \ln^3 3} (16 \ln^2 3 \cdot x^2 - 8x \ln 3 + 2) + c \quad \text{។}$$

៦.៣ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមានរាង $\int x^n e^{\alpha x} dx$

អាំងតេក្រាល $\int x^n e^{\alpha x} dx$ ($n \in \{0, 1, 2, \dots\}$) ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែល

មានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $x^n e^{\alpha x}$ ជាអនុគមន៍ចម្រុះដែលក្នុងនោះមានអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនិងអនុគមន៍ស្វ័យគុណ។

យើងនឹងគណនាអាំងតេក្រាល $\int x^n e^{\alpha x} dx$ តាមការសិក្សាពីករណីគឺ $\alpha = 0$ និង

$\alpha \neq 0$ ។

- ករណី $\alpha = 0$ នាំឱ្យ

$$\int x^n e^{\alpha x} dx = \int x^n e^{0 \cdot x} dx = \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- ករណី $\alpha \neq 0$ យើងតាង $I_n = \int x^n e^{\alpha x} dx$ ។

- បើ $n = 0$ នាំឱ្យ $I_0 = \int x^0 e^{\alpha x} dx = \int e^{\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} + c$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- បើ $n \geq 1$ នោះយើងប្រើវិធីអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកដើម្បីរកទំនាក់ទំនងរវាង I_n

និង I_{n-1} ដោយយក $u = x^n$ នាំឱ្យ $du = nx^{n-1} dx$ និង $dv = e^{\alpha x} dx$ នាំឱ្យ

$$v = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} \text{ ។}$$

$$\text{នាំឱ្យ } I_n = \int x^n e^{\alpha x} dx = \frac{x^n}{\alpha} e^{\alpha x} - \frac{n}{\alpha} \int x^{n-1} e^{\alpha x} dx$$

$$= \frac{x^n}{\alpha} e^{\alpha x} - \frac{n}{\alpha} I_{n-1} = \frac{x^n}{\alpha} e^{\alpha x} - \frac{n}{\alpha} \left(\frac{x^{n-1}}{\alpha} e^{\alpha x} - \frac{n-1}{\alpha} I_{n-2} \right)$$

$$= \frac{x^n}{\alpha} e^{\alpha x} - \frac{n x^{n-1}}{\alpha^2} e^{\alpha x} + \frac{n(n-1)}{\alpha^2} \left(\frac{x^{n-2}}{\alpha} e^{\alpha x} - \frac{n-2}{\alpha} I_{n-3} \right)$$

=

$$\begin{aligned}
&= \frac{x^n}{\alpha} e^{\alpha x} - \frac{n x^{n-1}}{\alpha^2} e^{\alpha x} + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{\alpha^3} e^{\alpha x} - \dots + \frac{(-1)^{n-3} n(n-1) \dots 3 \cdot x^3}{\alpha^{n-2}} e^{\alpha x} + \\
&\quad + \frac{(-1)^{n-2} n! \cdot x^2}{\alpha^{n-1}} e^{\alpha x} + \frac{(-1)^{n-1} n! \cdot x}{\alpha^n} e^{\alpha x} + \frac{(-1)^n n!}{\alpha^{n+1}} e^{\alpha x} + c \\
&= e^{\alpha x} \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i n! x^{n-i}}{(n-i)! \alpha^{i+1}} + c
\end{aligned}$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ដូចនេះ យើងបានរូបមន្ត

$$\boxed{\int x^n e^{\alpha x} dx = e^{\alpha x} \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i n! x^{n-i}}{(n-i)! \alpha^{i+1}} + c} \quad (6.5)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ, $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ និង $\alpha \neq 0$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៤ គណនា $\int x^3 e^{2x} dx$ និង $\int x^5 3^{4x+3} dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (6.5) យើងបាន៖

$$\int x^3 e^{2x} dx = e^{2x} \sum_{i=0}^3 \frac{(-1)^i 3! x^{3-i}}{(3-i)! 2^{i+1}} + c$$

$$\text{និង} \quad \int x^5 3^{4x+3} dx = 3^3 \int x^5 3^{4x} dx = 3^3 \int x^5 (e^{\ln 3})^{4x} dx$$

$$= 3^3 \int x^5 e^{(4 \ln 3)x} dx$$

$$= 3^3 e^{(4 \ln 3)x} \sum_{i=0}^5 \frac{(-1)^i 5! x^{5-i}}{(5-i)! (4 \ln 3)^{i+1}} + c$$

$$= 3^{4x+3} \sum_{i=0}^5 \frac{(-1)^i 5! x^{5-i}}{(5-i)! (4 \ln 3)^{i+1}} + c \quad \text{។}$$

៦.៤ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមានរាង $\int x^{-1} e^{\alpha x} dx$

អាំងតេក្រាល $\int x^{-1} e^{\alpha x} dx$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេ

ក្រាល $x^{-1}e^{\alpha x}$ ជាអនុគមន៍ចម្រុះដែលក្នុងនោះមានអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនិងអនុគមន៍ស្វ័យគុណ។

យើងនឹងគណនាអាំងតេក្រាល $\int x^{-1} e^{\alpha x} dx$ តាមការសិក្សាពីករណីគឺ $\alpha = 0$ និង

$\alpha \neq 0$ ។

- ករណី $\alpha = 0$ នាំឱ្យ

$$\int x^{-1} e^{\alpha x} dx = \int x^{-1} e^{0 \cdot x} dx = \int x^{-1} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- ករណី $\alpha \neq 0$ យើងគណនា $\int x^{-1} e^{\alpha x} dx = \int \frac{e^{\alpha x}}{x} dx$ ។

យើងមានស៊េរីស្វ័យគុណនៃចំនួនពិតគឺ

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \text{ចំពោះ } \forall x \in \mathbb{R}$$

នាំឱ្យ
$$\frac{e^{\alpha x}}{x} = \frac{1}{x} + \alpha + \frac{\alpha^2}{2!} x + \frac{\alpha^3}{3!} x^2 + \dots + \frac{\alpha^n}{n!} x^{n-1} + \dots$$
 ។

នាំឱ្យ
$$\begin{aligned} \int x^{-1} e^{\alpha x} dx &= \int \frac{e^{\alpha x}}{x} dx \\ &= \int \left(\frac{1}{x} + \alpha + \frac{\alpha^2}{2!} x + \frac{\alpha^3}{3!} x^2 + \dots + \frac{\alpha^n}{n!} x^{n-1} + \dots \right) dx \\ &= \ln|x| + \alpha x + \frac{\alpha^2}{2!} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{\alpha^3}{3!} \cdot \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{\alpha^n}{n!} \cdot \frac{x^n}{n} + \dots \\ &= \ln|x| + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\alpha x)^n}{n \cdot n!} \quad \text{។} \end{aligned}$$

ដូចនេះ យើងបានរូបមន្ត

$$\boxed{\int x^{-1} e^{\alpha x} dx = \int \frac{e^{\alpha x}}{x} dx = \ln|x| + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\alpha x)^n}{n \cdot n!}} \quad (6.6)$$

ចំពោះគ្រប់ $\alpha \in \mathbb{R}$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៥ គណនា $\int x^{-1} e^{2x} dx$ និង $\int_1^2 \frac{e^{3x}}{x} dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (6.6) យើងបាន៖

$$\int x^{-1} e^{2x} dx = \ln|x| + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2x)^n}{n \cdot n!}$$

និង
$$\int_1^2 \frac{e^{3x}}{x} dx = \ln|x| + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3x)^n}{n \cdot n!} \Bigg|_1^2$$

$$= \left(\ln|2| + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{6^n}{n \cdot n!} \right) - \left(\ln|1| + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n \cdot n!} \right)$$

$$= \ln 2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{6^n - 3^n}{n \cdot n!} \approx 76.0559 \text{ (ប្រើម៉ាស៊ីនគិតលេខ) ។}$$

ឧទាហរណ៍ទី៦ គណនាអាំងតេក្រាល $\int \frac{(3x^2 + 2x + 1)e^{4x}}{x} dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមលក្ខណៈអាំងតេក្រាល រូបមន្ត (6.1) និង (6.6) យើងបាន៖

$$\int \frac{(3x^2 + 2x + 1)e^{4x}}{x} dx = \int \left(3x + 2 + \frac{1}{x} \right) e^{4x} dx$$

$$= 3 \int x e^{4x} dx + 2 \int e^{4x} dx + \int \frac{e^{4x}}{x} dx$$

$$= 3 \cdot \frac{e^{4x}}{4^2} (4x - 1) + 2 \cdot \frac{1}{4} e^{4x} + \ln|x| + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(4x)^n}{n \cdot n!}$$

$$= \frac{3e^{4x}}{16} (4x - 1) + \frac{1}{2} e^{4x} + \ln|x| + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(4x)^n}{n \cdot n!} \quad \text{។}$$

ឧទាហរណ៍ទី៧ គណនាអាំងតេក្រាល $\int \frac{(3t-2)^3 e^{5t}}{t} dt$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមលក្ខណៈអាំងតេក្រាល រូបមន្ត (6.3), (6.1) និង (6.6) យើងបាន៖

$$\int \frac{(3t-2)^3 e^{5t}}{t} dt = \int \frac{[(3t)^3 + 3(3t)^2(-2) + 3(3t)(-2)^2 + (-2)^3] e^{5t}}{t} dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{(27t^3 - 54t^2 + 36t - 8)e^{5t}}{t} dt \\
&= \int \left(27t^2 - 54t + 36 - \frac{8}{t} \right) e^{5t} dt \\
&= 27 \int t^2 e^{5t} dt - 54 \int t e^{5t} dt + 36 \int e^{5t} dt - 8 \int \frac{e^{5t}}{t} dt \\
&= 27 \cdot \frac{e^{5t}}{5^3} (5^2 x^2 - 2 \cdot 5x + 2) - 54 \cdot \frac{e^{5t}}{5^2} (5x - 1) + 36 \cdot \frac{e^{5t}}{5} - 8 \left[\ln|x| + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(5x)^n}{n \cdot n!} \right] \\
&= \frac{e^{5t}}{125} (675x^2 - 270x + 54) - \frac{e^{5t}}{125} (1350x - 270) + 900 \cdot \frac{e^{5t}}{125} - 8 \ln|x| - 8 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(5x)^n}{n \cdot n!} \\
&= \frac{e^{5t}}{125} (675x^2 - 1620x + 1224) - 8 \ln|x| - 8 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(5x)^n}{n \cdot n!} \quad \text{។}
\end{aligned}$$

៦.៥ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមានរាង $\int x e^{\alpha x^2} dx$ និង $\int x a^{\alpha x^2} dx$

អាំងតេក្រាល $\int x e^{\alpha x^2} dx$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេ

ក្រាល $x e^{\alpha x^2}$ ជាអនុគមន៍ចម្រុះដែលក្នុងនោះមានអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនិងអនុគមន៍ស្វ័យគុណ។

យើងនឹងគណនាអាំងតេក្រាល $\int x e^{\alpha x^2} dx$ តាមការសិក្សាពីករណីគឺ $\alpha = 0$ និង

$\alpha \neq 0$ ។

- ករណី $\alpha = 0$ នាំឱ្យ

$$\int x e^{\alpha x^2} dx = \int x e^{0 \cdot x^2} dx = \int x dx = \frac{x^2}{2} + c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- ករណី $\alpha \neq 0$ នោះយើងប្រើវិធីប្តូរអថេរ ដោយតាង $u = \alpha x^2$ នាំឱ្យ

$$du = 2\alpha x dx \quad \text{សមមូល} \quad x dx = \frac{du}{2\alpha} \quad \text{។}$$

$$\text{នាំឱ្យ} \quad \int x e^{\alpha x^2} dx = \int e^u \frac{du}{2\alpha} = \frac{1}{2\alpha} \int e^u du$$

$$= \frac{1}{2\alpha} e^u + c = \frac{1}{2\alpha} e^{\alpha x^2} + c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ដូចនេះ យើងបានរូបមន្ត

$$\int x e^{\alpha x^2} dx = \frac{1}{2\alpha} e^{\alpha x^2} + c \quad (6.7)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

បន្ទាប់មក យើងនឹងគណនាអាំងតេក្រាល $\int x a^{\alpha x^2} dx$, $a > 0$, $a \neq 1$ ។

តាមរូបមន្ត (6.7) យើងទាញបាន៖

$$\begin{aligned} \int x a^{\alpha x^2} dx &= \int x (e^{\ln a})^{\alpha x^2} dx = \int x e^{(\alpha \ln a) x^2} dx \\ &= \frac{1}{2(\alpha \ln a)} e^{(\alpha \ln a) x^2} + c = \frac{1}{2\alpha \ln a} a^{\alpha x^2} + c \end{aligned}$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ និង $a > 0$, $a \neq 1$ ។

ដូចនេះ យើងបានរូបមន្ត

$$\int x a^{\alpha x^2} dx = \frac{1}{2\alpha \ln a} a^{\alpha x^2} + c \quad (6.8)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ និង $a > 0$, $a \neq 1$ ។

ចំពោះ $\alpha < 0$ និងតាមរូបមន្ត (6.7) យើងបាន៖

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{\alpha x^2} dx = \frac{1}{2\alpha} e^{\alpha x^2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{2\alpha e^{-\alpha x^2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0 - 0 = 0$$

$$\text{និង} \quad \int_0^{+\infty} x e^{\alpha x^2} dx = \frac{1}{2\alpha} e^{\alpha x^2} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2\alpha e^{-\alpha x^2}} \Big|_0^{+\infty} = 0 - \frac{1}{2\alpha} = -\frac{1}{2\alpha} \quad \text{។}$$

ដូចនេះ យើងបានរូបមន្ត

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{\alpha x^2} dx = 0 \quad (6.9) \quad \text{និង} \quad \int_0^{+\infty} x e^{\alpha x^2} dx = -\frac{1}{2\alpha} \quad (6.10)$$

ដែល $\alpha < 0$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៨ គណនា $\int x e^{2x^2} dx$, $\int x e^{-3x^2} dx$ និង $\int_0^1 x 5^{3x^2+4} dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (6.7) និង (6.8) យើងបាន៖

$$\int x e^{2x^2} dx = \frac{1}{2 \cdot 2} e^{2x^2} + c = \frac{1}{4} e^{2x^2} + c$$

$$\int x e^{-3x^2} dx = \frac{1}{2(-3)} e^{-3x^2} + c = -\frac{1}{6} e^{-3x^2} + c$$

$$\begin{aligned} \text{និង } \int_0^1 x 5^{3x^2+4} dx &= 5^4 \int_0^1 x 5^{3x^2} dx = 5^4 \cdot \frac{1}{2 \cdot 3 \ln 5} 5^{3x^2} \Big|_0^1 \\ &= 5^4 \left(\frac{1}{2 \cdot 3 \ln 5} 5^{3 \cdot 1^2} - \frac{1}{2 \cdot 3 \ln 5} 5^{3 \cdot 0^2} \right) \\ &= \frac{5^4 (5^3 - 1)}{6 \ln 5} = \frac{77500}{6 \ln 5} \text{ ។} \end{aligned}$$

៦.៦ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមានរាង $\int x^{-2} e^{-\alpha x^2} dx$

អាំងតេក្រាល $\int x^{-2} e^{-\alpha x^2} dx$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេ

ក្រាល $x^{-2} e^{-\alpha x^2}$ ជាអនុគមន៍ចម្រុះដែលក្នុងនោះមានអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនិងអនុគមន៍ស្វ័យគុណ។

យើងមានស៊េរីស្វ័យគុណនៃអនុគមន៍ e^x គឺ

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \text{ចំពោះ } \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{នាំឱ្យ } e^{-\alpha x^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-\alpha x^2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \alpha^k x^{2k}}{k!}$$

$$\begin{aligned} \text{និង } x^{-2} e^{-\alpha x^2} &= \frac{e^{-\alpha x^2}}{x^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \alpha^k x^{2k}}{x^2 k!} \\ &= \frac{1}{x^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k \alpha^k x^{2k}}{x^2 k!} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{x^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k \alpha^k x^{2k-2}}{k!} \quad \text{។}$$

$$\begin{aligned} \text{នាំឱ្យ} \quad \int x^{-2} e^{-\alpha x^2} dx &= \int \frac{e^{-\alpha x^2}}{x^2} dx = \int \left(\frac{1}{x^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k \alpha^k x^{2k-2}}{k!} \right) dx \\ &= \int x^{-2} dx + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k \alpha^k}{k!} \int x^{2k-2} dx \\ &= -\frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k \alpha^k x^{2k-1}}{k! (2k-1)} \quad \text{។} \end{aligned}$$

ដូចនេះ យើងបានរូបមន្ត

$$\boxed{\int x^{-2} e^{-\alpha x^2} dx = \int \frac{e^{-\alpha x^2}}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k \alpha^k x^{2k-1}}{k! (2k-1)}} \quad (6.11)$$

ចំពោះគ្រប់ $\alpha \in \mathbb{R}$ ។

$$\text{ឧទាហរណ៍ទី៩} \quad \text{គណនា} \int x^{-2} e^{-3x^2} dx \quad \text{និង} \quad \int_1^2 \frac{e^{-2x^2}}{x^2} dx \quad \text{។}$$

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (6.11) យើងបាន៖

$$\begin{aligned} \int x^{-2} e^{-3x^2} dx &= -\frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k 3^k x^{2k-1}}{k! (2k-1)} \\ \text{និង} \quad \int_1^2 \frac{e^{-2x^2}}{x^2} dx &= -\frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k 2^k x^{2k-1}}{k! (2k-1)} \Bigg|_1^2 \\ &= \left(-\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k 2^k \cdot 2^{2k-1}}{k! (2k-1)} \right) - \left(-\frac{1}{1} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k 2^k \cdot 1^{2k-1}}{k! (2k-1)} \right) \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k (2^{3k-1} - 2^k)}{k! (2k-1)} \quad \text{។} \end{aligned}$$

$$\text{៦.៧} \quad \text{ប្រភេទអាំងតេក្រាលមានរាង} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-a(x-b)^2} dx$$

$$\text{អាំងតេក្រាល} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-a(x-b)^2} dx \quad (a > 0) \quad \text{ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមាន}$$

អនុគមន៍អាំងតេក្រាល $x e^{-a(x-b)^2}$ ជាអនុគមន៍ចម្រុះដែលក្នុងនោះមានអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនិងអនុគមន៍ស្វ័យគុណ។

$$\text{ជាដំបូង យើងគណនា } I(a) = \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx \quad (a > 0) \text{ ។}$$

$$\begin{aligned} \text{នាំឱ្យ } (I(a))^2 &= \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx \int_0^{+\infty} e^{-ay^2} dy \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} e^{-ay^2} dx dy = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-a(x^2+y^2)} dx dy \quad (*) \text{ ។} \end{aligned}$$

តាង $y = xt$, $t > 0$ នាំឱ្យ $dy = x dt$, $t > 0$ និងតាមសមីការ (*) នាំឱ្យ

$$(I(a))^2 = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-a(x^2+x^2t^2)} x dx dt = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-a(1+t^2)x^2} x dx dt \quad (*_1) \text{ ។}$$

តាង $u = -a(1+t^2)x^2$ នាំឱ្យ $du = -2a(1+t^2)x dx \Rightarrow x dx = -\frac{du}{2a(1+t^2)}$ និង

តាមសមីការ $(*_1)$ នាំឱ្យ

$$\begin{aligned} (I(a))^2 &= - \int_0^{+\infty} \int_0^{-\infty} e^u \frac{du}{2a(1+t^2)} dt = -\frac{1}{2a} \int_0^{+\infty} \int_0^{-\infty} \frac{e^u}{1+t^2} du dt \\ &= -\frac{1}{2a} \int_0^{+\infty} \frac{e^u}{1+t^2} \Big|_0^{-\infty} dt = \frac{1}{2a} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} \\ &= \frac{1}{2a} \tan^{-1}(t) \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2a} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{\pi}{4a} \end{aligned}$$

$$\text{នាំឱ្យ } \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx = I(a) = \sqrt{\frac{\pi}{4a}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\text{និង } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \text{ ។}$$

ដូចនេះ យើងបានរូបមន្ត

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}} \quad (6.12) \quad \text{និង} \quad \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}} \quad (6.13)$$

ដែល $a > 0$ ។

បន្ទាប់មក យើងអាចគណនាអាំងតេក្រាល $\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-a(x-b)^2} dx$ នេះបានដោយតាង

$$t = x - b \text{ នាំឱ្យ } dt = dx \text{ និង } x = t + b \text{ ។}$$

$$\begin{aligned} \text{នាំឱ្យ } \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-a(x-b)^2} dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} (t+b) e^{-at^2} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-at^2} dt + b \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2} dt \\ &= 0 + b \sqrt{\frac{\pi}{a}} = b \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (\text{តាមរូបមន្ត (6.9) និង (6.13) }) \end{aligned}$$

ដូចនេះ យើងបានរូបមន្ត

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-a(x-b)^2} dx = b \sqrt{\frac{\pi}{a}}} \quad (6.14)$$

ដែល $a > 0$ ។

ឧទាហរណ៍ទី១០ គណនា $\int_0^{+\infty} e^{-2x^2} dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3x^2} dx$ និង $\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-3(x-2)^2} dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (6.12), (6.13) និង (6.14) យើងបាន៖

$$\int_0^{+\infty} e^{-2x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{3}}$$

$$\text{និង } \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-3(x-2)^2} dx = 2 \sqrt{\frac{\pi}{3}} \text{ ។}$$

៦.៨ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមានរាង $\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-ax^2+bx} dx$

អាំងតេក្រាល $\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-ax^2+bx} dx$ ($a > 0$) ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមាន

អនុគមន៍អាំងតេក្រាល $x e^{-ax^2+bx}$ ជាអនុគមន៍ចម្រុះដែលក្នុងនោះមានអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនិងអនុគមន៍ស្វ័យគុណ។

$$\begin{aligned}\text{យើងមាន } -ax^2 + bx &= -a \left(x^2 - 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} \right) \\ &= -a \left(x - \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{b^2}{4a} \quad \text{។}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{នាំឱ្យ } \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-ax^2+bx} dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-a \left(x - \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{b^2}{4a}} dx \\ &= e^{\frac{b^2}{4a}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-a \left(x - \frac{b}{2a} \right)^2} dx \\ &= e^{\frac{b^2}{4a}} \cdot \frac{b}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} = \frac{\sqrt{\pi} b}{2a^{3/2}} e^{\frac{b^2}{4a}} \quad (\text{តាមរូបមន្ត (6.14)}) \quad \text{។}\end{aligned}$$

ដូចនេះ យើងបានរូបមន្ត

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-ax^2+bx} dx = \frac{\sqrt{\pi} b}{2a^{3/2}} e^{\frac{b^2}{4a}}} \quad (6.15)$$

ដែល $a > 0$ ។

$$\text{ឧទាហរណ៍ទី១១} \quad \text{គណនា } \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2+2x} dx \text{ និង } \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-4x^2+3x+2} dx \quad \text{។}$$

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (6.15) យើងបាន៖

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2+2x} dx &= \frac{\sqrt{\pi} \cdot 2}{2 \cdot 1^{3/2}} e^{\frac{2^2}{4 \cdot 1}} = e \sqrt{\pi} \\ \text{និង } \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-4x^2+3x+2} dx &= e^2 \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-4x^2+3x} dx \\ &= e^2 \cdot \frac{\sqrt{\pi} \cdot 3}{2 \cdot 4^{3/2}} e^{\frac{3^2}{4 \cdot 4}} = \frac{3\sqrt{\pi}}{16} e^{\frac{41}{16}} \quad \text{។}\end{aligned}$$

$$\text{៦.៩ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមានរាង } \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx$$

អាំងតេក្រាល $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx$ ($a > 0$) ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមាន

អនុគមន៍អាំងតេក្រាល $x^2 e^{-ax^2}$ ជាអនុគមន៍ចម្រុះដែលក្នុងនោះមានអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនិងអនុគមន៍ស្វ័យគុណ។

យើងមានរូបមន្ត (6.13) គឺ $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ ដែល $a > 0$ ។

យើងធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីរនៃសមីការ (6.13) ធៀបនឹងអថេរ a ផ្តល់ឱ្យ

$$\frac{d}{da} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{d}{da} \sqrt{\frac{\pi}{a}} = \frac{d}{da} (\sqrt{\pi} a^{-1/2})$$

សមមូល
$$- \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \sqrt{\pi} \left(-\frac{1}{2} \right) a^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

ដូចនេះ
$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a^3}}} \quad (6.16)$$

ដែល $a > 0$ ។

ឧទាហរណ៍ទី១២ គណនា $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx$ និង $\int_{-\infty}^{+\infty} (3x-2)^2 e^{-2x^2} dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (6.16) នាំឱ្យ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{1^3}} = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$$

និងតាមរូបមន្ត (6.16) , (6.9) និង (6.13) នាំឱ្យ

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} (3x-2)^2 e^{-2x^2} dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left((3x)^2 - 2(3x)(2) + 2^2 \right) e^{-2x^2} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (9x^2 - 12x + 4) e^{-2x^2} dx \\ &= 9 \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-2x^2} dx - 12 \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-2x^2} dx + 4 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x^2} dx \\ &= 9 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2^3}} - 12 \times 0 + 4 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \\ &= \left(\frac{9}{4} + 4 \right) \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{25}{4} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{។} \end{aligned}$$

៦.១០ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមានរាង $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2-bx} dx$

អាំងតេក្រាល $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2-bx} dx$ ($a > 0$) ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមាន

អនុគមន៍អាំងតេក្រាល $x^2 e^{-ax^2-bx}$ ជាអនុគមន៍ចម្រុះដែលក្នុងនោះមានអនុគមន៍អ៊ីចស្ប៉ូណង់ស្យែលនិងអនុគមន៍ស្វ័យគុណ។

$$\begin{aligned} \text{យើងមាន } -ax^2 - bx &= -a\left(x^2 + \frac{bx}{a}\right) = -a\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right) \\ &= -a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{b^2}{4a} \quad \text{។} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{នាំឱ្យ } \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2-bx} dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{b^2}{4a}} dx \\ &= e^{\frac{b^2}{4a}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2} dx \quad (*) \quad \text{។} \end{aligned}$$

តាង $t = x + \frac{b}{2a}$ នាំឱ្យ $dt = dx$ និង $x = t - \frac{b}{2a}$ ហើយ

$$x^2 = \left(t - \frac{b}{2a}\right)^2 = t^2 - 2 \cdot t \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = t^2 - \frac{b}{a}t + \frac{b^2}{4a^2} \quad \text{។}$$

បើ $x \rightarrow +\infty$ នោះ $t \rightarrow +\infty$ ហើយបើ $x \rightarrow -\infty$ នោះ $t \rightarrow -\infty$ ។

តាមសមីការ (*) ហើយរូបមន្ត (6.16), (6.9) និង (6.13) នាំឱ្យ

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2-bx} dx &= e^{\frac{b^2}{4a}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2} dx \\ &= e^{\frac{b^2}{4a}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(t^2 - \frac{b}{a}t + \frac{b^2}{4a^2}\right) e^{-at^2} dt \\ &= e^{\frac{b^2}{4a}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-at^2} dt - \frac{b}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-at^2} dt + \frac{b^2}{4a^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2} dt \right] \\ &= e^{\frac{b^2}{4a}} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2a^{3/2}} + \frac{b^2 \sqrt{\pi}}{4a^{5/2}} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}(2a+b^2)}{4a^{5/2}} e^{\frac{b^2}{4a}} \quad \text{។}$$

ដូចនេះ យើងបានរូបមន្ត

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2-bx} dx = \frac{\sqrt{\pi}(2a+b^2)}{4a^{5/2}} e^{\frac{b^2}{4a}}} \quad (6.17)$$

ដែល $a > 0$ ។

ឧទាហរណ៍ទី១៣ គណនា $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2-x} dx$ និង $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-2x^2-3x} dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (6.17) នាំឱ្យ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2-x} dx = \frac{\sqrt{\pi}(2 \cdot 1 + 1^2)}{4 \cdot 1^{5/2}} e^{\frac{1^2}{4 \cdot 1}} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} e^{\frac{1}{4}}$$

និង $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-2x^2-3x} dx = \frac{\sqrt{\pi}(2 \cdot 2 + 3^2)}{4 \cdot 2^{5/2}} e^{\frac{3^2}{4 \cdot 2}} = \frac{13\sqrt{\pi}}{16\sqrt{2}} e^{\frac{9}{8}} \quad \text{។}$

ឧទាហរណ៍ទី១៤ គណនា $\int_{-\infty}^{+\infty} (2x+5)^2 e^{-4x^2-3x} dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $(2x+5)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(5) + 5^2 = 4x^2 + 20x + 25$ ។

នាំឱ្យ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (2x+5)^2 e^{-4x^2-3x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (4x^2 + 20x + 25) e^{-4x^2-3x} dx$$

តាមរូបមន្ត (6.17) នាំឱ្យ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-4x^2-3x} dx = \frac{\sqrt{\pi}(2 \cdot 4 + 3^2)}{4 \cdot 4^{5/2}} e^{\frac{3^2}{4 \cdot 4}} = \frac{17\sqrt{\pi}}{4 \cdot 32} e^{\frac{9}{16}} \quad (*_2) \quad \text{។}$$

តាមរូបមន្ត (6.15) នាំឱ្យ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-4x^2-3x} dx = \frac{\sqrt{\pi}(-3)}{2 \cdot 4^{3/2}} e^{\frac{(-3)^2}{4 \cdot 4}} = -\frac{3\sqrt{\pi}}{16} e^{\frac{9}{16}} \quad (*_3) \quad \text{។}$$

ឥឡូវនេះ យើងគណនាអាំងតេក្រាល $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-4x^2-3x} dx$ ។

យើងមាន $-4x^2-3x = -4\left(x+\frac{3}{8}\right)^2 + \frac{9}{16}$ ។

តាង $t = x + \frac{3}{8}$ នាំឱ្យ $dt = dx$ ។

បើ $x \rightarrow +\infty$ នោះ $t \rightarrow +\infty$ ហើយបើ $x \rightarrow -\infty$ នោះ $t \rightarrow -\infty$ ។

$$\begin{aligned} \text{នាំឱ្យ } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-4x^2-3x} dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-4\left(x+\frac{3}{8}\right)^2 + \frac{9}{16}} dx \\ &= e^{\frac{9}{16}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-4\left(x+\frac{3}{8}\right)^2} dx \\ &= e^{\frac{9}{16}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-4t^2} dx \\ &= e^{\frac{9}{16}} \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\frac{9}{16}} \quad (*) \end{aligned}$$

តាម $(*)$, $(*)$, $(*)$ និង $(*)$ នាំឱ្យ

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} (2x+5)^2 e^{-4x^2-3x} dx &= 4 \cdot \frac{17\sqrt{\pi}}{4 \cdot 32} e^{\frac{9}{16}} + 20 \cdot \left(-\frac{3\sqrt{\pi}}{16} e^{\frac{9}{16}} \right) + 25 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\frac{9}{16}} \\ &= \frac{297\sqrt{\pi}}{32} e^{\frac{9}{16}} \end{aligned}$$

៦.១១ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមានរាង $\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-ax^2+bx} dx$

អាំងតេក្រាល $\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-ax^2+bx} dx$ ($a > 0$) ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមាន

អនុគមន៍អាំងតេក្រាល $x^3 e^{-ax^2+bx}$ ជាអនុគមន៍ចម្រុះដែលក្នុងនោះមានអនុគមន៍អ៊ីចស្ស័រ ណង់ស្បែលនិងអនុគមន៍ស្វ័យគុណ។

យើងមាន $-ax^2+bx = -a\left(x^2 - 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right)$

$$= -a \left(x - \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{b^2}{4a} \quad \text{។}$$

$$\begin{aligned} \text{នាំឱ្យ} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-ax^2+bx} dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-a \left(x - \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{b^2}{4a}} dx \\ &= e^{\frac{b^2}{4a}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-a \left(x - \frac{b}{2a} \right)^2} dx \quad (*) \quad \text{។} \end{aligned}$$

តាង $t = x - \frac{b}{2a}$ នាំឱ្យ $dt = dx$ និង $x = t + \frac{b}{2a}$ ហើយ

$$\begin{aligned} x^3 &= \left(t + \frac{b}{2a} \right)^3 = t^3 + 3 \cdot t^2 \cdot \frac{b}{2a} + 3t \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \left(\frac{b}{2a} \right)^3 \\ &= t^3 + \frac{3b}{2a} t^2 + \frac{3b^2}{4a^2} t + \frac{b^3}{8a^3} \quad \text{។} \end{aligned}$$

បើ $x \rightarrow +\infty$ នោះ $t \rightarrow +\infty$ ហើយបើ $x \rightarrow -\infty$ នោះ $t \rightarrow -\infty$ ។

តាមសមីការ (*) នាំឱ្យ

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-ax^2+bx} dx &= e^{\frac{b^2}{4a}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-a \left(x - \frac{b}{2a} \right)^2} dx \\ &= e^{\frac{b^2}{4a}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(t^3 + \frac{3b}{2a} t^2 + \frac{3b^2}{4a^2} t + \frac{b^3}{8a^3} \right) e^{-at^2} dt \\ &= e^{\frac{b^2}{4a}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} t^3 e^{-at^2} dt + \frac{3b}{2a} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-at^2} dt + \frac{3b^2}{4a^2} \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-at^2} dt + \frac{b^3}{8a^3} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2} dt \right] \\ &= e^{\frac{b^2}{4a}} \left[0 + \frac{3b}{2a} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a^3}} + \frac{3b^2}{4a^2} \cdot 0 + \frac{b^3}{8a^3} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{a}} \right] \\ &= \sqrt{\pi} e^{\frac{b^2}{4a}} \left[\frac{3b}{4a^{5/2}} + \frac{b^3}{8a^{7/2}} \right] = \frac{\sqrt{\pi} (6ab + b^3)}{8a^{7/2}} e^{\frac{b^2}{4a}} \quad \text{។} \end{aligned}$$

ដូចនេះ យើងបានរូបមន្ត

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-ax^2+bx} dx = \frac{\sqrt{\pi} (6ab + b^3)}{8a^{7/2}} e^{\frac{b^2}{4a}}} \quad (6.18)$$

ដែល $a > 0$ ។

ឧទាហរណ៍ទី១៥ គណនា $\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-x^2+x} dx$ និង $\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-9x^2-2x} dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (6.18) នាំឱ្យ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-x^2+x} dx = \frac{\sqrt{\pi} (6(1)(1) + 1^3)}{8 \cdot 1^{7/2}} e^{\frac{1^2}{4(1)}} = \frac{7\sqrt{\pi}}{8} e^{\frac{1}{4}}$$

និង

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-9x^2-2x} dx &= \frac{\sqrt{\pi} (6(9)(-2) + (-2)^3)}{8 \cdot 9^{7/2}} e^{\frac{(-2)^2}{4(9)}} \\ &= \frac{-116\sqrt{\pi}}{17496} e^{\frac{1}{9}} = \frac{-29\sqrt{\pi}}{4374} e^{\frac{1}{9}} \end{aligned}$$

ជាសរុប ជំពូកទី៦នេះបានផ្តល់នូវវិធីសាស្ត្រគណនាអាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនិងអនុគមន៍ស្វ័យគុណដែលមានទម្រង់ពិសេសមួយចំនួនដូចជា $\int x e^{\alpha x} dx$,

$$\int x a^{\alpha x} dx, \int x^2 e^{\alpha x} dx, \int x^2 a^{\alpha x} dx, \int x^n e^{\alpha x} dx, \int x^{-1} e^{\alpha x} dx, \int x e^{\alpha x^2} dx,$$

$$\int x a^{\alpha x^2} dx, \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{\alpha x^2} dx, \int_0^{+\infty} x e^{\alpha x^2} dx, \int_{-\infty}^{+\infty} x^{-2} e^{-\alpha x^2} dx, \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-a(x-b)^2} dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-a x^2 + b x} dx, \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-a x^2} dx, \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-a x^2 - b x} dx \quad \text{និង} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-a x^2 + b x} dx$$

ដោយបង្កើតជារូបមន្តដើម្បីយកមកប្រើប្រាស់ជាលក្ខណៈទូទៅនិងបានអនុវត្តន៍លើឧទាហរណ៍មួយចំនួន។ បន្ទាប់មក យើងនឹងបង្ហាញនិងសិក្សាអំពីប្រភេទអាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍លោការីតនិងអនុគមន៍ស្វ័យគុណនៅក្នុងជំពូកទី៧បន្តទៀត។

ជំពូកទី៧

ប្រភេទអាំងតេក្រាលមាន

អនុគមន៍លោការីតនិងអនុគមន៍ស្វ័យគុណ

(Types of Integrals Involving Logarithmic and Power Functions)

នៅក្នុងជំពូកទី៧នេះ យើងនឹងសិក្សាអំពីប្រភេទអាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍លោការីតនិងអនុគមន៍ស្វ័យគុណដែលមានលក្ខណៈពិសេសមួយចំនួននិងដំណោះស្រាយរបស់វាដូចតទៅ៖

៧.១ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមានរាង $\int x^m \ln x \, dx$

អាំងតេក្រាល $\int x^m \ln x \, dx$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $x^m \ln x$ ជាអនុគមន៍ចម្រុះដែលក្នុងនោះមានអនុគមន៍លោការីតនិងអនុគមន៍ស្វ័យគុណ។

យើងនឹងគណនាអាំងតេក្រាល $\int x^m \ln x \, dx$ តាមវិធីអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក

ដោយយក $u = \ln x$, $x > 0$ នាំឱ្យ $du = \frac{dx}{x}$ និង $dv = x^m \, dx$ នាំឱ្យ

$$v = \frac{x^{m+1}}{m+1}, \quad m \neq -1 \quad \text{។}$$

$$\text{នាំឱ្យ} \quad \int x^m \ln x \, dx = \int u \, dv = uv - \int v \, du$$

$$= \frac{x^{m+1}}{m+1} \ln x - \frac{1}{m+1} \int x^{m+1} \cdot \frac{dx}{x}$$

$$= \frac{x^{m+1}}{m+1} \ln x - \frac{1}{m+1} \int x^m \, dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x^{m+1}}{m+1} \ln x - \frac{1}{m+1} \cdot \frac{x^{m+1}}{m+1} + c \\
&= x^{m+1} \left[\frac{\ln x}{m+1} - \frac{1}{(m+1)^2} \right] + c
\end{aligned}$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ដូចនេះ យើងបានរូបមន្ត

$$\int x^m \ln x \, dx = x^{m+1} \left[\frac{\ln x}{m+1} - \frac{1}{(m+1)^2} \right] + c \quad (7.1)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ឧទាហរណ៍ទី១ គណនា $\int \ln x \, dx$, $\int x \ln x \, dx$ និង $\int x^2 \ln x \, dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (7.1) យើងបាន៖

$$\int \ln x \, dx = \int x^0 \ln x \, dx = x^{0+1} \left[\frac{\ln x}{0+1} - \frac{1}{(0+1)^2} \right] + c = x(\ln x - 1) + c$$

$$\int x \ln x \, dx = x^{1+1} \left[\frac{\ln x}{1+1} - \frac{1}{(1+1)^2} \right] + c = x^2 \left(\frac{\ln x}{2} - \frac{1}{4} \right) + c$$

$$\text{និង} \quad \int x^2 \ln x \, dx = x^{2+1} \left[\frac{\ln x}{2+1} - \frac{1}{(2+1)^2} \right] + c = x^3 \left(\frac{\ln x}{3} - \frac{1}{9} \right) + c \quad \text{។}$$

ឧទាហរណ៍ទី២ គណនា $\int_1^e x^3 \ln x \, dx$ និង $\int_1^{+\infty} x^{-3} \ln x \, dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (7.1) យើងបាន៖

$$\begin{aligned}
\int_1^e x^3 \ln x \, dx &= x^{3+1} \left[\frac{\ln x}{3+1} - \frac{1}{(3+1)^2} \right] \Bigg|_1^e = x^4 \left[\frac{\ln x}{4} - \frac{1}{16} \right] \Bigg|_1^e \\
&= e^4 \left[\frac{\ln e}{4} - \frac{1}{16} \right] - 1^4 \left[\frac{\ln 1}{4} - \frac{1}{16} \right] = \frac{3e^4 + 1}{16} \approx 10.2996
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{និង} \quad \int_1^{+\infty} x^{-3} \ln x \, dx &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_1^N x^{-3} \ln x \, dx \\
 &= \lim_{N \rightarrow +\infty} x^{-3+1} \left[\frac{\ln x}{-3+1} - \frac{1}{(-3+1)^2} \right] \Bigg|_1^N \\
 &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \left[\frac{-\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} \right] \Bigg|_1^N \\
 &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \left[\frac{-\ln N}{2N^2} - \frac{1}{4N^2} + \frac{\ln 1}{2} + \frac{1}{4} \right] = \frac{1}{4} \quad \text{។}
 \end{aligned}$$

៧.២ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមានរាង $\int \frac{(\ln(ax))^n}{x} dx$

អាំងតេក្រាល $\int \frac{(\ln(ax))^n}{x} dx$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំង

តេក្រាល $\frac{(\ln(ax))^n}{x}$ ជាអនុគមន៍ចម្រុះដែលក្នុងនោះមានអនុគមន៍លោការីតនិងអនុគមន៍ស្វ័យគុណដែល $a \neq 0$ ។ អនុគមន៍នេះកំណត់បានចំពោះ $x > 0$ បើ $a > 0$ និងវាកំណត់បានចំពោះ $x < 0$ បើ $a < 0$ ។

យើងនឹងគណនាអាំងតេក្រាល $\int \frac{(\ln(ax))^n}{x} dx$ ដែល $a \neq 0$ ។ យើងតា $u = ax$

នាំឱ្យ $x = \frac{u}{a}$ និង $dx = \frac{du}{a}$ ។

$$\begin{aligned}
 \text{នាំឱ្យ} \quad \int \frac{(\ln(ax))^n}{x} dx &= \int \frac{(\ln(u))^n}{(u/a)} \cdot \frac{du}{a} \\
 &= \int \frac{(\ln(u))^n}{u} du = \int (\ln(u))^n d(\ln(u)) \quad (*) \quad \text{។}
 \end{aligned}$$

- បើ $n = -1$ នោះពីសមីការ (*) នាំឱ្យ

$$\begin{aligned}
 \int \frac{(\ln(ax))^n}{x} dx &= \int (\ln u)^{-1} d(\ln u) = \int \frac{d(\ln u)}{\ln u} \\
 &= \ln |\ln u| + c = \ln |\ln(ax)| + c
 \end{aligned}$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ដូចនេះ យើងបានរូបមន្ត

$$\int \frac{(\ln(ax))^{-1}}{x} dx = \int \frac{dx}{x \ln(ax)} = \ln|\ln(ax)| + c \quad (7.2)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ និង $a \neq 0$ ។

- បើ $n \neq -1$ នោះពីសមីការ (*) នាំឱ្យ

$$\begin{aligned} \int \frac{(\ln(ax))^n}{x} dx &= \int (\ln(u))^n d(\ln(u)) \\ &= \frac{(\ln(u))^{n+1}}{n+1} + c = \frac{(\ln(ax))^{n+1}}{n+1} + c \end{aligned}$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ដូចនេះ យើងបានរូបមន្ត

$$\int \frac{(\ln(ax))^n}{x} dx = \frac{(\ln(ax))^{n+1}}{n+1} + c \quad (7.3)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ និង $a \neq 0, n \neq -1$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៣ គណនា $\int \frac{dx}{x \ln x}$ និង $\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (7.2) និង (7.3) យើងបាន៖

$$\int \frac{dx}{x \ln x} = \ln|\ln x| + c$$

និង
$$\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \frac{(\ln x)^3}{3} + c$$
 ។

ឧទាហរណ៍ទី៤ គណនា $\int_e^{3e} \frac{dx}{x \ln(2x)}$ និង $\int_1^e \frac{(\ln 3 + \ln x)^5}{x} dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (7.2) និង (7.3) យើងបាន៖

$$\int_e^{3e} \frac{dx}{x \ln(2x)} = \ln|\ln(2x)| \Big|_e^{3e} = \ln|\ln(6e)| - \ln|\ln(2e)|$$

$$= \ln\left(\frac{\ln 6e}{\ln 2e}\right) \approx 0.5000$$

និង
$$\int_1^e \frac{(\ln 3 + \ln x)^5}{x} dx = \int_1^e \frac{(\ln 3x)^5}{x} dx = \frac{(\ln(3x))^6}{6} \Big|_1^e$$

$$= \frac{(\ln(3e))^6}{6} - \frac{(\ln(3))^6}{6}$$

$$= \frac{(\ln 3e)^6 - (\ln 3)^6}{6} \approx 13.9447 \text{ ។}$$

៧.៣ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមានរាង $\int \frac{\ln(ax)^n}{x} dx$

អាំងតេក្រាល $\int \frac{\ln(ax)^n}{x} dx$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេ

ក្រាល $\frac{\ln(ax)^n}{x}$ ជាអនុគមន៍ចម្រុះដែលក្នុងនោះមានអនុគមន៍លោការីតនិងអនុគមន៍ស្វ័យគុណដែល $a \neq 0$ ។ អនុគមន៍នេះកំណត់បានចំពោះ $x > 0$ បើ $a > 0$ និងវាកំណត់បានចំពោះ $x < 0$ បើ $a < 0$ ។

យើងនឹងគណនាអាំងតេក្រាល $\int \frac{\ln(ax)^n}{x} dx$ ដែល $a \neq 0$ ។

- បើ $n = 0$ នាំឱ្យ

$$\int \frac{\ln(ax)^n}{x} dx = \int \frac{\ln(ax)^0}{x} dx = \int \frac{\ln 1}{x} dx = \int 0 dx = c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- បើ $n \neq 0$ និង យើងតាង $t = \ln(ax)$ នាំឱ្យ $ax = e^t$, $x = \frac{1}{a}e^t$ និង

$$dx = \frac{1}{a}e^t dt \text{ ។}$$

នាំឱ្យ
$$\int \frac{\ln(ax)^n}{x} dx = n \int \frac{\ln(ax)}{x} dx$$

$$= n \int \frac{t}{\left(\frac{e^t}{a}\right)} \cdot \frac{e^t}{a} dt$$

$$= n \int t \, dt = n \cdot \frac{t^2}{2} + c$$

$$= \frac{n(\ln(ax))^2}{2} + c = \frac{(\ln(ax)^n)^2}{2n} + c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ដូចនេះ យើងបានរូបមន្ត

$$\boxed{\int \frac{\ln(ax)^n}{x} dx = \frac{n(\ln(ax))^2}{2} + c = \frac{(\ln(ax)^n)^2}{2n} + c} \quad (7.4)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ និង $a \neq 0$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៥ គណនា $\int \frac{\ln x}{x} dx$ និង $\int \frac{\ln x^3}{x} dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (7.4) យើងបាន៖

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{(\ln x)^2}{2} + c$$

និង $\int \frac{\ln x^3}{x} dx = \frac{3(\ln x)^2}{2} + c$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៦ គណនា $\int_1^e \frac{\ln x^7}{x} dx$ និង $\int_1^e \frac{\ln 625 + \ln x^4}{x} dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (7.4) យើងបាន៖

$$\int_1^e \frac{\ln x^7}{x} dx = \frac{7(\ln x)^2}{2} \Big|_1^e = \frac{7(\ln e)^2}{2} - \frac{7(\ln 1)^2}{2} = \frac{7}{2}$$

និង $\int_1^e \frac{\ln 625 + \ln x^4}{x} dx = \int_1^e \frac{\ln 5^4 + \ln x^4}{x} dx = \int_1^e \frac{\ln(5x)^4}{x} dx$

$$= \frac{4(\ln(5x))^2}{2} \Big|_1^e = 2(\ln(5e))^2 - 2(\ln 5)^2 \approx 8.4377$$

៧.៤ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមានរាង $\int \frac{\ln(ax)}{x^m} dx$

អាំងតេក្រាល $\int \frac{\ln(ax)}{x^m} dx$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $\frac{\ln(ax)}{x^m}$ ជាអនុគមន៍ចម្រុះដែលក្នុងនោះមានអនុគមន៍លោការីតនិងអនុគមន៍ស្វ័យគុណដែល $a \neq 0$ ។ អនុគមន៍នេះកំណត់បានចំពោះ $x > 0$ បើ $a > 0$ និងវាកំណត់បានចំពោះ $x < 0$ បើ $a < 0$ ។

យើងនឹងគណនាអាំងតេក្រាល $\int \frac{\ln(ax)}{x^m} dx$ ដែល $a \neq 0$ ។

យើងតាង $t = \ln(ax)$ នាំឱ្យ $ax = e^t$, $x = \frac{1}{a}e^t$ និង $dx = \frac{1}{a}e^t dt$ ។

នាំឱ្យ $\int \frac{\ln(ax)}{x^m} dx = \int \frac{t}{\left(\frac{e^t}{a}\right)^m} \cdot \frac{e^t}{a} dt = a^{m-1} \int t e^{(1-m)t} dt$ (*) ។

- បើ $m=1$ នោះតាមសមីការ (*) នាំឱ្យ

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln(ax)}{x^m} dx &= \int \frac{\ln(ax)}{x} dx = \int t dt \\ &= \frac{t^2}{2} + c = \frac{(\ln(ax))^2}{2} + c \end{aligned}$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- បើ $m \neq 1$ យើងប្រើវិធីអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក ដោយយក $u = t$ នាំឱ្យ $du = dt$

និង $dv = e^{(1-m)t} dt$ នាំឱ្យ $v = -\frac{e^{-(m-1)t}}{m-1}$, $m \neq 1$ ។

នោះតាមសមីការ (*) នាំឱ្យ

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln(ax)}{x^m} dx &= a^{m-1} \int t e^{(1-m)t} dt \\ &= a^{m-1} \int u dv = a^{m-1} \left(uv - \int v du \right) \\ &= a^{m-1} \left(-\frac{t e^{-(m-1)t}}{m-1} + \frac{1}{m-1} \int e^{-(m-1)t} dt \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{a^{m-1} t e^{-(m-1)t}}{m-1} + \frac{a^{m-1}}{m-1} \left(-\frac{e^{-(m-1)t}}{m-1} \right) \\
&= -\frac{a^{m-1} \ln(ax) (ax)^{-(m-1)}}{m-1} - \frac{a^{m-1}}{(m-1)^2} (ax)^{-(m-1)} + c \\
&= -\frac{\ln(ax)}{(m-1)x^{m-1}} - \frac{1}{(m-1)^2 x^{m-1}} + c
\end{aligned}$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ដូចនេះ យើងបានរូបមន្ត

$$\boxed{\int \frac{\ln(ax)}{x^m} dx = -\frac{\ln(ax)}{(m-1)x^{m-1}} - \frac{1}{(m-1)^2 x^{m-1}} + c} \quad (7.5)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ, $m \neq 1$ និង $a \neq 0$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៧ គណនា $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$ និង $\int \frac{\ln(2x)}{x^3} dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (7.5) យើងបាន៖

$$\begin{aligned}
\int \frac{\ln x}{x^2} dx &= -\frac{\ln x}{(2-1)x^{2-1}} - \frac{1}{(2-1)^2 x^{2-1}} + c \\
&= -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + c
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{និង } \int \frac{\ln(2x)}{x^3} dx &= -\frac{\ln(2x)}{(3-1)x^{3-1}} - \frac{1}{(3-1)^2 x^{3-1}} + c \\
&= -\frac{\ln(2x)}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + c \quad \text{។}
\end{aligned}$$

ឧទាហរណ៍ទី៨ គណនា $\int_1^e \frac{\ln(5x)}{x^5} dx$ និង $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(7x)}{x^7} dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (7.5) យើងបាន៖

$$\begin{aligned}
 \int_1^e \frac{\ln(5x)}{x^5} dx &= -\frac{\ln(5x)}{(5-1)x^{5-1}} - \frac{1}{(5-1)^2 x^{5-1}} \Big|_1^e \\
 &= -\frac{\ln(5x)}{4x^4} - \frac{1}{16x^4} \Big|_1^e \\
 &= \left(-\frac{\ln(5e)}{4e^4} - \frac{1}{16e^4} \right) - \left(-\frac{\ln(5)}{4} - \frac{1}{16} \right) \\
 &= -\frac{\ln(5e)}{4e^4} - \frac{1}{16e^4} + \frac{\ln(5)}{4} + \frac{1}{16} \approx 0.4517
 \end{aligned}$$

និង

$$\begin{aligned}
 \int_1^{+\infty} \frac{\ln(7x)}{x^7} dx &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_1^N \frac{\ln(7x)}{x^7} dx \\
 &= \lim_{N \rightarrow +\infty} -\frac{\ln(7x)}{(7-1)x^{7-1}} - \frac{1}{(7-1)^2 x^{7-1}} \Big|_1^N \\
 &= \lim_{N \rightarrow +\infty} -\frac{\ln(7x)}{6x^6} - \frac{1}{36x^6} \Big|_1^N \\
 &= 0 + \frac{\ln(7)}{6} + \frac{1}{36} = \frac{\ln(7)}{6} + \frac{1}{36} \text{ ។}
 \end{aligned}$$

៧.៥ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមានរាង $\int \frac{dx}{x[\ln(ax)]^n}$

អាំងតេក្រាល $\int \frac{dx}{x[\ln(ax)]^n}$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំង

តេក្រាល $\frac{1}{x[\ln(ax)]^n}$ ជាអនុគមន៍ចម្រុះដែលក្នុងនោះមានអនុគមន៍លោការីតនិង

អនុគមន៍ស្វ័យគុណដែល $a \neq 0$ ។ អនុគមន៍នេះកំណត់បានចំពោះ $x > 0$ បើ $a > 0$ និងវាកំណត់បានចំពោះ $x < 0$ បើ $a < 0$ ។

យើងនឹងគណនាអាំងតេក្រាល $\int \frac{dx}{x[\ln(ax)]^n}$ ដែល $a \neq 0$ ។

យើងតាង $t = \ln(ax)$ នាំឱ្យ $ax = e^t$, $x = \frac{1}{a}e^t$ និង $dx = \frac{1}{a}e^t dt$ ។

នាំឱ្យ
$$\int \frac{dx}{x[\ln(ax)]^n} = \int \frac{1}{(e^t/a)t^n} \cdot \frac{e^t}{a} dt = \int t^{-n} dt \quad (*) \quad \text{។}$$

- បើ $n=1$ នោះតាមសមីការ (*) នាំឱ្យ

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x[\ln(ax)]^n} &= \int t^{-1} dt = \int \frac{dt}{t} \\ &= \ln|t| + c = \ln|\ln(ax)| + c \end{aligned}$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- បើ $n \neq 1$ នោះតាមសមីការ (*) នាំឱ្យ

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x[\ln(ax)]^n} &= \int t^{-n} dt = \frac{t^{-n+1}}{-n+1} + c \\ &= -\frac{1}{(n-1)t^{n-1}} + c = -\frac{1}{(n-1)[\ln(ax)]^{n-1}} + c \end{aligned}$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ដូចនេះ យើងបានរូបមន្ត

$$\boxed{\int \frac{dx}{x[\ln(ax)]^n} = -\frac{1}{(n-1)[\ln(ax)]^{n-1}} + c} \quad (7.6)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ, $n \neq 1$ និង $a \neq 0$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៩ គណនា $\int \frac{dx}{x(\ln x)^2}$ និង $\int \frac{dx}{x(\ln 2x)^3}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (7.6) យើងបាន៖

$$\int \frac{dx}{x(\ln x)^2} = -\frac{1}{(2-1)(\ln x)^{2-1}} + c = -\frac{1}{\ln x} + c$$

និង
$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x(\ln 2x)^3} &= -\frac{1}{(3-1)[\ln(2x)]^{3-1}} + c \\ &= -\frac{1}{2[\ln(2x)]^2} + c \quad \text{។} \end{aligned}$$

ឧទាហរណ៍ទី១០ គណនា $\int_e^{2e} \frac{dx}{x(\ln 3x)^4}$ និង $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln ex)^9}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (7.6) យើងបាន៖

$$\begin{aligned} \int_e^{2e} \frac{dx}{x(\ln 3x)^4} &= -\frac{1}{(4-1)[\ln(3x)]^{4-1}} \Big|_e^{2e} = -\frac{1}{3[\ln(3x)]^3} \Big|_e^{2e} \\ \text{និង} \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln ex)^9} &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_1^N \frac{dx}{x(\ln ex)^9} \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} -\frac{1}{(9-1)[\ln(ex)]^{9-1}} \Big|_1^N \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} -\frac{1}{8[\ln(ex)]^8} \Big|_1^N \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} -\frac{1}{8[\ln(eN)]^8} + \frac{1}{8[\ln(e)]^8} = 0 + \frac{1}{8} = \frac{1}{8} \quad \text{។} \end{aligned}$$

៧.៦ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមានរាង $\int \frac{dx}{x^m \ln x}$

អាំងតេក្រាល $\int \frac{dx}{x^m \ln x}$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេ

ក្រាល $\frac{1}{x^m \ln x}$ ជាអនុគមន៍ចម្រុះដែលក្នុងនោះមានអនុគមន៍លោការីតនិងអនុគមន៍ស្វ័យ

គុណ។ អនុគមន៍នេះកំណត់បានចំពោះ $x > 0$ ។

យើងនឹងគណនាអាំងតេក្រាល $\int \frac{dx}{x^m \ln x}$ ដែល $m \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ ។

យើងតាង $t = \ln x$ នាំឱ្យ $x = e^t$ និង $dx = e^t dt$ ។

$$\text{នាំឱ្យ} \quad \int \frac{dx}{x^m \ln x} = \int \frac{1}{(e^t)^m} \cdot e^t dt = \int \frac{e^{(1-m)t}}{t} dt \quad (*) \quad \text{។}$$

- បើ $m=1$ នោះតាមសមីការ (*) នាំឱ្យ

$$\int \frac{dx}{x^m \ln x} = \int \frac{e^{(1-1)t}}{t} dt = \int \frac{dt}{t}$$

$$= \ln|t| + c = \ln|\ln x| + c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- បើ $m \geq 2$ និងយើងមាន

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \forall x \in \mathbb{R} \text{ ។}$$

នាំឱ្យ
$$\frac{e^{(1-m)t}}{t} = \frac{1}{t} \left(1 + (1-m)t + \frac{[(1-m)t]^2}{2!} + \dots + \frac{[(1-m)t]^n}{n!} + \dots \right)$$

នោះតាមសមីការ (*) និង (*) នាំឱ្យ

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^m \ln x} &= \int \frac{e^{(1-m)t}}{t} dt = \int \left[\frac{1}{t} + (1-m) + \frac{(1-m)^2}{2!} t + \dots + \frac{(1-m)^n}{n!} t^{n-1} + \dots \right] dt \\ &= \ln|t| + (1-m)t + \frac{(1-m)^2}{2!} \cdot \frac{t^2}{2} + \dots + \frac{(1-m)^n}{n!} \cdot \frac{t^n}{n} + \dots \\ &= \ln|t| + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(1-m)^k}{k!} \cdot \frac{t^k}{k} \\ &= \ln|\ln x| + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k (m-1)^k}{k \cdot k!} (\ln x)^k \text{ ។} \end{aligned}$$

ដូចនេះ យើងបានរូបមន្ត

$$\boxed{\int \frac{dx}{x^m \ln x} = \ln|\ln x| + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k (m-1)^k}{k \cdot k!} (\ln x)^k} \quad (7.7)$$

ដែល $m \in \mathbb{N}$ ។

ឧទាហរណ៍ទី១១ គណនា $\int \frac{dx}{x^2 \ln x}$ និង $\int \frac{dx}{x^5 \ln x}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (7.7) យើងបាន៖

$$\int \frac{dx}{x^2 \ln x} = \ln |\ln x| + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k \cdot k!} (\ln x)^k$$

និង $\int \frac{dx}{x^5 \ln x} = \ln |\ln x| + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k 4^k}{k \cdot k!} (\ln x)^k$ ។

ឧទាហរណ៍ទី១២ គណនា $\int \frac{dx}{x^3 \ln(3x)}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $t = 3x$ នាំឱ្យ $x = \frac{t}{3}$ និង $dx = \frac{dt}{3}$ ។

$$\begin{aligned} \text{នាំឱ្យ } \int \frac{dx}{x^3 \ln(3x)} &= \int \frac{dt/3}{(t/3)^3 \ln t} \\ &= \frac{3^3}{3} \int \frac{dt}{t^3 \ln t} = 9 \int \frac{dt}{t^3 \ln t} \\ &= 9 \left[\ln |\ln t| + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k 2^k}{k \cdot k!} (\ln t)^k \right] \quad (\text{តាមរូបមន្ត (7.7)}) \\ &= 9 \ln |\ln(3x)| + 9 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k 2^k}{k \cdot k!} (\ln(3x))^k \quad \text{។} \end{aligned}$$

៧.៧ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមានរាង $\int x^m (\ln x)^n dx$

អាំងតេក្រាល $\int x^m (\ln x)^n dx$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំង

តេក្រាល $x^m (\ln x)^n$ ជាអនុគមន៍ចម្រុះដែលក្នុងនោះមានអនុគមន៍លោការីតនិងអនុគមន៍ស្វ័យគុណ។ អនុគមន៍នេះកំណត់បានចំពោះ $x > 0$ ។

យើងនឹងគណនាអាំងតេក្រាល $\int x^m (\ln x)^n dx$ ដែល $n \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ ។

- ករណី $m = -1$ នាំឱ្យ

$$\int x^m (\ln x)^n dx = \int x^{-1} (\ln x)^n dx = \int (\ln x)^n \frac{dx}{x}$$

$$= \int (\ln x)^n d(\ln x) = \frac{(\ln x)^{n+1}}{n+1} + c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- ករណី $m \neq -1$ និង $n = 0$ នាំឱ្យ

$$\begin{aligned} \int x^m (\ln x)^n dx &= \int x^m (\ln x)^0 dx \\ &= \int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + c \end{aligned}$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ និង $m \neq -1$ ។

- ករណី $m \neq -1$ និង $n \in \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}$ យើងប្រើវិធីអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក

ដោយយក $u = (\ln x)^n$, $x > 0$ នាំឱ្យ $du = \frac{n(\ln x)^{n-1}}{x} dx$ និង $dv = x^m dx$ នាំឱ្យ

$$v = \frac{x^{m+1}}{m+1}, \quad m \neq -1 \quad \text{។}$$

$$\text{នាំឱ្យ} \quad \int x^m (\ln x)^n dx = \int u dv = uv - \int v du$$

$$\begin{aligned} &= \frac{x^{m+1} (\ln x)^n}{m+1} - \frac{n}{m+1} \int x^{m+1} \frac{(\ln x)^{n-1}}{x} dx \\ &= \frac{x^{m+1} (\ln x)^n}{m+1} - \frac{n}{m+1} \int x^m (\ln x)^{n-1} dx \quad \text{។} \end{aligned}$$

ដូចនេះ ចំពោះ $m \neq -1$ និង $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ យើងបានរូបមន្តខាងក្រោម៖

$$\boxed{\int x^m (\ln x)^n dx = \frac{x^{m+1} (\ln x)^n}{m+1} - \frac{n}{m+1} \int x^m (\ln x)^{n-1} dx} \quad (7.8) \quad \text{។}$$

ឧទាហរណ៍ទី១៣ គណនា $\int x \ln x dx$ និង $\int x^{-5} \ln x dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (7.8) យើងបាន៖

$$\int x \ln x dx = \frac{x^{1+1} (\ln x)^1}{1+1} - \frac{1}{1+1} \int x^1 (\ln x)^{1-1} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2} \int x^1 dx \\
&= \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + c \\
&= \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + c
\end{aligned}$$

និង $\int x^{-5} \ln x \, dx = \frac{x^{-5+1}(\ln x)^1}{-5+1} - \frac{1}{-5+1} \int x^{-5} (\ln x)^{1-1} dx$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x^{-4} \ln x}{-4} + \frac{1}{4} \int x^{-5} dx \\
&= \frac{x^{-4} \ln x}{-4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{x^{-5+1}}{-5+1} + c \\
&= -\frac{\ln x}{4x^4} - \frac{1}{16x^4} + c \quad \text{។}
\end{aligned}$$

ឧទាហរណ៍ទី១៤ គណនា $\int_1^e x(\ln x)^2 \, dx$ និង $\int_1^e x^2(\ln x)^3 \, dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (7.8) យើងបាន៖

$$\begin{aligned}
\int_1^e x(\ln x)^2 \, dx &= \frac{x^{1+1}(\ln x)^2}{1+1} \Big|_1^e - \frac{2}{1+1} \int_1^e x^1 (\ln x)^{2-1} \, dx \\
&= \frac{e^2(\ln e)^2}{2} - \frac{1^2(\ln 1)^2}{2} - \int_1^e x^1 (\ln x)^1 \, dx \\
&= \frac{e^2}{2} - \frac{x^{1+1}(\ln x)^1}{1+1} \Big|_1^e + \frac{1}{1+1} \int_1^e x^1 (\ln x)^{1-1} \, dx \\
&= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2(\ln e)^1}{2} + \frac{1^2(\ln 1)^1}{2} + \frac{1}{2} \int_1^e x^1 \, dx \\
&= 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_1^e = \frac{e^2}{4} - \frac{1^2}{4} = \frac{e^2-1}{4} \approx 1.5972
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{និង } \int_1^e x^2 (\ln x)^3 dx &= \frac{x^{2+1} (\ln x)^3}{2+1} \Big|_1^e - \frac{3}{2+1} \int_1^e x^2 (\ln x)^{3-1} dx \\
&= \frac{e^3}{3} - \frac{x^{2+1} (\ln x)^2}{2+1} \Big|_1^e + \frac{2}{2+1} \int_1^e x^2 (\ln x)^{2-1} dx \\
&= \frac{e^3}{3} - \frac{e^3 (\ln e)^2}{3} + \frac{1^3 (\ln 1)^2}{3} + \frac{2}{3} \int_1^e x^2 \ln x dx \\
&= 0 + \frac{2}{3} \int_1^e x^2 \ln x dx \\
&= \frac{2}{3} \cdot \frac{x^{2+1} (\ln x)^1}{2+1} \Big|_1^e - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2+1} \int_1^e x^2 (\ln x)^{1-1} dx \\
&= \frac{2}{3} \cdot \frac{e^3 (\ln e)^1}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1^3 (\ln 1)^1}{3} - \frac{2}{9} \int_1^e x^2 dx \\
&= \frac{4e^3 + 2}{27} \approx 3.0497 \quad \text{។}
\end{aligned}$$

ឧទាហរណ៍ទី១៥ គណនា $\int_1^{+\infty} x^{-6} (\ln x)^3 dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (7.8) យើងបាន៖

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} x^{-6} (\ln x)^3 dx &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_1^N x^{-6} (\ln x)^3 dx \\
&= 0 + \frac{3}{5} \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_1^N x^{-6} (\ln x)^2 dx \\
&= \frac{3}{5} \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{N^{-5} (\ln N)^2}{-5} - \frac{1^{-5} (\ln 1)^2}{-5} + \frac{6}{25} \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_1^N x^{-6} (\ln x)^1 dx \\
&= 0 + \frac{6}{25} \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_1^N x^{-6} (\ln x)^1 dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{6}{25} \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{x^{-6+1}(\ln x)^1}{-6+1} \Big|_1^N - \frac{6}{25} \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{-6+1} \int_1^N x^{-6} (\ln x)^{1-1} dx \\
&= \frac{6}{25} \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{N^{-5} \ln N}{-5} - \frac{1^{-5} \ln 1}{-5} + \frac{6}{125} \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_1^N x^{-6} dx \\
&= \frac{6}{25} \cdot 0 + \frac{6}{125} \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{x^{-5}}{-5} \Big|_1^N \\
&= \frac{6}{125} \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{N^{-5}}{-5} - \frac{1^{-5}}{-5} = \frac{6}{125} \left(0 + \frac{1}{5} \right) = \frac{6}{625} \quad \text{។}
\end{aligned}$$

៧.៨ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមានរាង $\int \frac{x^m}{(\ln x)^n} dx$

អាំងតេក្រាល $\int \frac{x^m}{(\ln x)^n} dx$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេ

ក្រាល $\frac{x^m}{(\ln x)^n}$ ជាអនុគមន៍ចម្រុះដែលក្នុងនោះមានអនុគមន៍លោការីតនិងអនុគមន៍ស្វ័យ

គុណ។ អនុគមន៍នេះកំណត់បានចំពោះ $x > 0$ ។

យើងនឹងគណនាអាំងតេក្រាល $\int \frac{x^m}{(\ln x)^n} dx$ ដែល $n \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ ។

- ករណី $n=0$ និង $m=-1$ នាំឱ្យ

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^m}{(\ln x)^n} dx &= \int \frac{x^{-1}}{(\ln x)^0} dx \\
&= \int x^{-1} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c
\end{aligned}$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- ករណី $n=0$ និង $m \neq -1$ នាំឱ្យ

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^m}{(\ln x)^n} dx &= \int \frac{x^m}{(\ln x)^0} dx \\
&= \int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + c
\end{aligned}$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- ករណី $n=1$ និង $m=-1$ នាំឱ្យ

$$\int \frac{x^m}{(\ln x)^n} dx = \int \frac{x^{-1}}{\ln x} dx = \int \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln |\ln x| + c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- ករណី $n=1$ និង $m \neq -1$ នាំឱ្យ

$$\int \frac{x^m}{(\ln x)^n} dx = \int \frac{x^m}{\ln x} dx$$

(ករណីនេះ យើងខ្ញុំមិនអាចគណនាវាបាន ហេតុនេះយើងខ្ញុំនឹងស្រាវជ្រាវបន្ត)។

- ករណី $n \in \{2, 3, 4, \dots\}$ យើងប្រើវិធីអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក ដោយយក

$$u = x^{m+1} \text{ នាំឱ្យ } du = (m+1)x^m dx \text{ និង } dv = \frac{dx}{x(\ln x)^n} \text{ នាំឱ្យ } v = \frac{(\ln x)^{-n+1}}{-n+1}$$

$$= -\frac{1}{(n-1)(\ln x)^{n-1}} \text{ ។}$$

$$\text{នាំឱ្យ } \int \frac{x^m}{(\ln x)^n} dx = \int u dv = uv - \int v du$$

$$= -\frac{x^{m+1}}{(n-1)(\ln x)^{n-1}} + \frac{(m+1)}{n-1} \int \frac{x^m}{(\ln x)^{n-1}} dx \text{ ។}$$

ដូចនេះ ចំពោះ $n \in \{2, 3, 4, \dots\}$ យើងបានរូបមន្តខាងក្រោម៖

$$\boxed{\int \frac{x^m}{(\ln x)^n} dx = -\frac{x^{m+1}}{(n-1)(\ln x)^{n-1}} + \frac{(m+1)}{n-1} \int \frac{x^m}{(\ln x)^{n-1}} dx} \quad (7.9) \text{ ។}$$

ឧទាហរណ៍ទី១៦ គណនា $\int \frac{x}{(\ln x)^2} dx$ និង $\int \frac{x}{(\ln x)^3} dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (7.9) យើងបាន៖

$$\int \frac{x}{(\ln x)^2} dx = -\frac{x^{1+1}}{(2-1)(\ln x)^{2-1}} + \frac{(1+1)}{2-1} \int \frac{x^1}{(\ln x)^{2-1}} dx$$

$$= -\frac{x^2}{\ln x} + 2 \int \frac{x}{\ln x} dx \quad (*) \text{ ។}$$

បន្ទាប់មក យើងតាង $u = \ln x$ នាំឱ្យ $x = e^u$ និង $dx = e^u du$ ។

ពីសមីការ (*) នាំឱ្យ

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\ln x} dx &= \int \frac{e^u}{u} \cdot e^u du = \int \frac{e^{2u}}{u} du \\ &= \int \frac{1}{u} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2u)^k}{k!} du = \int \left[\frac{1}{u} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k u^{k-1}}{k!} \right] du \\ &= \ln|u| + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k u^k}{k \cdot k!} \\ &= \ln|\ln x| + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k (\ln x)^k}{k \cdot k!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{និង} \quad \int \frac{x}{(\ln x)^2} dx &= -\frac{x^2}{\ln x} + 2 \int \frac{x}{\ln x} dx \\ &= -\frac{x^2}{\ln x} + 2 \left[\ln|\ln x| + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k (\ln x)^k}{k \cdot k!} \right] \\ &= -\frac{x^2}{\ln x} + 2 \ln|\ln x| + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^{k+1} (\ln x)^k}{k \cdot k!} \quad (*_1) \text{ ។} \end{aligned}$$

តាមរូបមន្ត (7.9) យើងបាន៖

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{(\ln x)^3} dx &= -\frac{x^{1+1}}{(3-1)(\ln x)^{3-1}} + \frac{(1+1)}{3-1} \int \frac{x}{(\ln x)^{3-1}} dx \\ &= -\frac{x^2}{2(\ln x)^2} + \int \frac{x}{(\ln x)^2} dx \\ &= -\frac{x^2}{2(\ln x)^2} - \frac{x^2}{\ln x} + 2 \ln|\ln x| + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^{k+1} (\ln x)^k}{k \cdot k!} \quad (\text{តាម } (*_1)) \text{ ។} \end{aligned}$$

ជាសរុប ជំពូកទី៧នេះបានផ្តល់នូវវិធីសាស្ត្រគណនាអាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍លោការីតនិងអនុគមន៍ស្វ័យគុណដែលមានទម្រង់ពិសេសមួយចំនួនដូចជា $\int x^m \ln x \, dx$,

$$\int \frac{(\ln(ax))^n}{x} dx, \quad \int \frac{\ln(ax)^n}{x} dx, \quad \int \frac{\ln(ax)}{x^m} dx, \quad \int \frac{dx}{x[\ln(ax)]^n}, \quad \int \frac{dx}{x^m \ln x},$$

$$\int x^m (\ln x)^n dx \quad \text{និង} \quad \int \frac{x^m}{(\ln x)^n} dx \quad \text{ដោយបង្កើតជារូបមន្តដើម្បីយកមកប្រើប្រាស់ជា}$$

លក្ខណៈទូទៅនិងបានអនុវត្តលើឧទាហរណ៍មួយចំនួន។ បន្ទាប់មក យើងនឹងបង្ហាញនិងសិក្សាអំពីប្រភេទអាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍អ៊ីពែបូលីកនៅក្នុងជំពូកទី៨បន្តទៀត។

ជំពូកទី៨

ប្រភេទអាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍អ៊ីពែបូលីក

(Types of Integrals Involving Hyperbolic Functions)

នៅក្នុងជំពូកទី៨នេះ យើងនឹងសិក្សាអំពីអនុគមន៍អ៊ីពែបូលីកនិងប្រភេទអាំងតេក្រាល មានអនុគមន៍អ៊ីពែបូលីកដែលមានលក្ខណៈពិសេសមួយចំនួននិងដំណោះស្រាយរបស់វាដូច តទៅ៖

៨.១ អនុគមន៍អ៊ីពែបូលីក

៨.១.១ និយមន័យ

អនុគមន៍អ៊ីពែបូលីកមានដូចជា $\cosh$, $\sinh$, $\tanh$, $\coth$, sech និង cosech ហើយកំណត់ដោយ៖

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

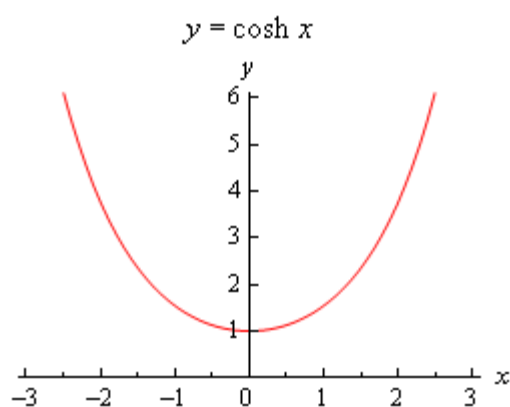
$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$$

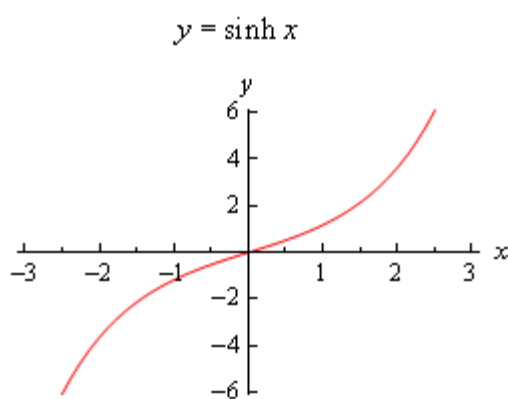
និង

$$\operatorname{cosech} x = \frac{1}{\sinh x} \quad \text{។}$$

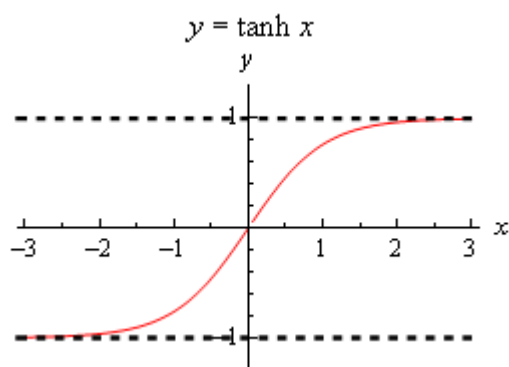
រូបខាងក្រោម ជាក្រាហ្វនៃអនុគមន៍អ៊ីពែបូលីក $y = \cosh x$, $y = \sinh x$ និង $y = \tanh x$ ។



រូបទី១



រូបទី២



រូបទី៣

៨.១.២ លក្ខណៈ

យើងមានរូបមន្តសំខាន់នៃអនុគមន៍អ៊ីពែបូលីកមួយចំនួនខាងក្រោម៖

$$១. \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$២. 1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$$

$$៣. 1 - \coth^2 x = -\operatorname{cosech}^2 x$$

$$៤. \frac{d}{dx}(\sinh x) = (\sinh x)'_x = \cosh x$$

$$៥. \frac{d}{dx}(\cosh x) = (\cosh x)'_x = \sinh x$$

$$៦. \frac{d}{dx}(\tanh x) = (\tanh x)'_x = \operatorname{sech}^2 x$$

$$៧. \frac{d}{dx}(\coth x) = (\coth x)'_x = -\operatorname{cosech}^2 x$$

ឥឡូវនេះ យើងនឹងស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តទី១ ទី២ និង ទី៤ដូចតទៅ៖

$$១. \text{បង្ហាញថា } \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \text{ ។}$$

$$\begin{aligned} \text{យើងមាន } \cosh^2 x - \sinh^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} (e^x + e^{-x})^2 - \frac{1}{4} (e^x - e^{-x})^2 \\ &= \frac{1}{4} (e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}) - \frac{1}{4} (e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x}) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{-2x} = 1 \quad (\text{ពិត})$$

២. បង្ហាញថា $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$ ។

យើងមាន

$$\begin{aligned} 1 - \tanh^2 x &= 1 - \left(\frac{\sinh x}{\cosh x} \right)^2 = 1 - \left(\frac{(e^x - e^{-x})/2}{(e^x + e^{-x})/2} \right)^2 \\ &= \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} \\ &= \frac{e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x} - e^{2x} + 2e^x e^{-x} - e^{-2x}}{(e^x + e^{-x})^2} \\ &= \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{1}{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2} \\ &= \frac{1}{\cosh^2 x} = \operatorname{sech}^2 x \quad (\text{ពិត}) \end{aligned}$$

៤. បង្ហាញថា $\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x$ ។

យើងមាន

$$\frac{d}{dx}(\sinh x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x \quad (\text{ពិត})$$

ឧទាហរណ៍ទី១ គេឱ្យ $\sinh x_0 = 4$ ។ ចូររកតម្លៃនៃអនុគមន៍អ៊ីពែបូលីកប្រាំផ្សេងទៀតគ្រង់ចំណុច x_0 ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $\sinh x_0 = 4$ និងរូបមន្ត $\cosh^2 x_0 - \sinh^2 x_0 = 1$ នាំឱ្យ

$$\cosh^2 x_0 = 1 + \sinh^2 x_0 = 1 + 4^2 = 17 \quad \text{។}$$

ដោយ $\cosh x_0 = \frac{e^{x_0} + e^{-x_0}}{2} > 0, \forall x_0 \in \mathbb{R}$ នាំឱ្យ $\cosh x_0 = \sqrt{17}$ ។

ពីរូបមន្តនៃអនុគមន៍អ៊ីពែបូលីក យើងទាញបាន៖

$$\tanh x_0 = \frac{\sinh x_0}{\cosh x_0} = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$\coth x_0 = \frac{\cosh x_0}{\sinh x_0} = \frac{\sqrt{17}}{4}$$

$$\operatorname{sech} x_0 = \frac{1}{\cosh x_0} = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

និង $\operatorname{cosech} x_0 = \frac{1}{\sinh x_0} = \frac{1}{4}$ ។

ឧទាហរណ៍ទី២ ដោះស្រាយសមីការ $5\cosh x + 3\sinh x = 4$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $5\cosh x + 3\sinh x = 4$

$$\text{សមមូល} \quad 5\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) + 3\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = 4$$

$$\text{សមមូល} \quad 5e^x + 5e^{-x} + 3e^x - 3e^{-x} = 8$$

$$\text{សមមូល} \quad 8e^x + 2e^{-x} = 8$$

$$\text{សមមូល} \quad 4e^x + e^{-x} = 4$$

$$\text{សមមូល} \quad 4(e^x)^2 + 1 = 4e^x$$

$$\text{សមមូល} \quad 4(e^x)^2 - 4e^x + 1 = 0$$

$$\text{សមមូល} \quad (2e^x - 1)^2 = 0 \quad \text{សមមូល} \quad 2e^x - 1 = 0$$

$$\text{សមមូល} \quad e^x = \frac{1}{2} \quad \text{សមមូល} \quad x = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2 \quad \text{ជាឫសសមីការ។}$$

ឧទាហរណ៍ទី៣ គណនាដេរីវេ $\frac{d}{dx}(\sinh(ax))$ និង $\frac{d}{dx}(\cosh(ax))$ ដែល a ជាចំនួន

ពិតប្រាកដ។

ដំណោះស្រាយ

$$\begin{aligned} \text{យើងមាន} \quad \frac{d}{dx}(\sinh(ax)) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2}\right) = \frac{ae^{ax} + ae^{-ax}}{2} \\ &= a\left(\frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2}\right) = a \cosh(ax) \end{aligned}$$

$$\text{និង} \quad \frac{d}{dx}(\cosh(ax)) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2}\right) = \frac{ae^{ax} - ae^{-ax}}{2}$$

$$= a \left(\frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2} \right) = a \sinh(ax) \quad \text{។}$$

ដូចនេះ: $\frac{d}{dx}(\sinh(ax)) = a \cosh(ax)$ និង $\frac{d}{dx}(\cosh(ax)) = a \sinh(ax)$ ។

៨.២ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមានរាង $\int \sinh(ax) dx$

អាំងតេក្រាល $\int \sinh(ax) dx$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $\sinh(ax)$ ជាអនុគមន៍ស៊ីនុសអ៊ីពែបូលីកកំណត់លើ $\mathbb{R}$ ។

យើងនឹងគណនាអាំងតេក្រាល $\int \sinh(ax) dx$ តាមករណីពីរគឺ $a=0$ និង $a \neq 0$ ។

- ករណី $a=0$ នាំឱ្យ

$$\int \sinh(ax) dx = \int \sinh(0) dx = \int \frac{e^0 - e^{-0}}{2} dx = \int 0 dx = c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- ករណី $a \neq 0$ នាំឱ្យ

$$\begin{aligned} \int \sinh(ax) dx &= \int \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{a} e^{ax} - \frac{1}{(-a)} e^{-ax} \right] + c \\ &= \frac{1}{a} \cdot \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2} + c = \frac{1}{a} \cosh(ax) + c \end{aligned}$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ដូចនេះ ចំពោះ $a \neq 0$ យើងបានរូបមន្ត

$$\boxed{\int \sinh(ax) dx = \frac{1}{a} \cosh(ax) + c} \quad (8.1)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ឧទាហរណ៍ទី៤ គណនា $\int \sinh(2x) dx$ និង $\int_0^1 \sinh\left(\frac{3}{2}x\right) dx$ ។

ជំនួយការស្រាយ

តាមរូបមន្ត (8.1) យើងបាន៖

$$\int \sinh(2x) dx = \frac{1}{2} \cosh(2x) + c$$

$$\begin{aligned} \text{និង } \int_0^1 \sinh\left(\frac{3}{2}x\right) dx &= \frac{1}{(3/2)} \cosh\left(\frac{3}{2}x\right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{2}{3} \cosh\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{2}{3} \cosh(0) \\ &= \frac{2}{3} \cosh\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{2}{3} \approx 0.9016 \quad \text{។} \end{aligned}$$

ឧទាហរណ៍ទី៥ គណនា $\int \sinh(2x+3) dx$ និង $\int_0^2 x \sinh\left(\frac{3}{2}x^2 + 4\right) dx$ ។

ជំនួយការស្រាយ

តាង $u = 2x+3$ នាំឱ្យ $du = 2dx$ និង $dx = \frac{du}{2}$ ។

$$\begin{aligned} \text{នាំឱ្យ } \int \sinh(2x+3) dx &= \int \sinh u \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int \sinh u du \\ &= \frac{1}{2} \cosh u + c = \frac{1}{2} \cosh(2x+3) + c \quad (\text{តាមរូបមន្ត (8.1)}) \quad \text{។} \end{aligned}$$

ចំពោះ $\int_0^2 x \sinh\left(\frac{3}{2}x^2 + 4\right) dx$ យើងតាង $u = \frac{3}{2}x^2 + 4$ នាំឱ្យ $du = 3x dx$ និង $x dx = \frac{du}{3}$ ។

ពេល $x=0$ នោះ $u = \frac{3}{2}x^2 + 4 = 4$ និងពេល $x=2$ នោះ $u = \frac{3}{2}x^2 + 4 = 10$ ។

$$\begin{aligned} \text{នាំឱ្យ } \int_0^2 x \sinh\left(\frac{3}{2}x^2 + 4\right) dx &= \int_4^{10} \sinh u \frac{du}{3} = \frac{1}{3} \int_4^{10} \sinh u du \\ &= \frac{1}{3} \cosh u \Big|_4^{10} \quad (\text{តាមរូបមន្ត (8.1)}) \\ &= \frac{1}{3} (\cosh 10 - \cosh 4) \approx 3661.9748 \quad \text{។} \end{aligned}$$

៨.៣ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមានរាង $\int \cosh(ax) dx$

អាំងតេក្រាល $\int \cosh(ax) dx$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $\cosh(ax)$ ជាអនុគមន៍កូស៊ីនុសអ៊ីពែបូលីកកំណត់លើ $\mathbb{R}$ ។

យើងនឹងគណនាអាំងតេក្រាល $\int \cosh(ax) dx$ តាមករណីពីរគឺ $a=0$ និង $a \neq 0$ ។

- ករណី $a=0$ នាំឱ្យ

$$\int \cosh(ax) dx = \int \cosh(0) dx = \int \frac{e^0 + e^{-0}}{2} dx = \int 1 dx = x + c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- ករណី $a \neq 0$ នាំឱ្យ

$$\begin{aligned} \int \cosh(ax) dx &= \int \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{a} e^{ax} + \frac{1}{(-a)} e^{-ax} \right] + c \\ &= \frac{1}{a} \cdot \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2} + c = \frac{1}{a} \sinh(ax) + c \end{aligned}$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ដូចនេះ ចំពោះ $a \neq 0$ យើងបានរូបមន្ត

$$\boxed{\int \cosh(ax) dx = \frac{1}{a} \sinh(ax) + c} \quad (8.2)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ឧទាហរណ៍ទី៦ គណនា $\int \cosh(3x) dx$ និង $\int_0^1 \cosh\left(\frac{4}{5}x\right) dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (8.2) យើងបាន៖

$$\int \cosh(3x) dx = \frac{1}{3} \sinh(3x) + c$$

$$\begin{aligned}
 \text{និង } \int_0^1 \cosh\left(\frac{4}{5}x\right) dx &= \frac{1}{(4/5)} \sinh\left(\frac{4}{5}x\right) \Big|_0^1 \\
 &= \frac{5}{4} \sinh\left(\frac{4}{5}\right) - \frac{5}{4} \sinh(0) \\
 &= \frac{5}{4} \sinh\left(\frac{4}{5}\right) \approx 1.1101 \quad \text{។}
 \end{aligned}$$

ឧទាហរណ៍ទី៧ គណនា $\int \cosh(3v-2) dv$ និង $\int_0^1 t^2 \cosh(-t^3+3) dt$ ។
ដំណោះស្រាយ

តាង $u = 3v-2$ នាំឱ្យ $du = 3dv$ និង $dv = \frac{du}{3}$ ។

$$\begin{aligned}
 \text{នាំឱ្យ } \int \cosh(3v-2) dv &= \int \cosh u \frac{du}{3} = \frac{1}{3} \int \cosh u du \\
 &= \frac{1}{3} \sinh u + c = \frac{1}{3} \sinh(3v-2) + c \quad (\text{តាមរូបមន្ត (8.2)}) \quad \text{។}
 \end{aligned}$$

ចំពោះ $\int_0^1 t^2 \cosh(-t^3+3) dt$ យើងតាង $u = -t^3+3$ នាំឱ្យ $du = -3t^2 dt$ និង

$$t^2 dt = -\frac{du}{3} \quad \text{។ ពេល } t=0 \text{ នោះ } u = -t^3+3=3 \text{ និងពេល } t=1 \text{ នោះ } u = -t^3+3=2 \text{ ។}$$

$$\begin{aligned}
 \text{នាំឱ្យ } \int_0^1 t^2 \cosh(-t^3+3) dt &= \int_3^2 \cosh u \left(-\frac{du}{3}\right) = -\frac{1}{3} \int_3^2 \cosh u du \\
 &= -\frac{1}{3} \sinh u \Big|_3^2 \quad (\text{តាមរូបមន្ត (8.2)}) \\
 &= -\frac{1}{3} (\sinh 2 - \sinh 3) \approx 2.1303 \quad \text{។}
 \end{aligned}$$

៨.៤ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមានរាង $\int \sinh^2(ax) dx$

អាំងតេក្រាល $\int \sinh^2(ax) dx$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំង

តេក្រាល $\sinh^2(ax)$ ជាអនុគមន៍អ៊ីពែបូលីកកំណត់លើ $\mathbb{R}$ ។

យើងនឹងគណនាអាំងតេក្រាល $\int \sinh^2(ax) dx$ តាមករណីពីរគឺ $a=0$ និង $a \neq 0$ ។

- ករណី $a=0$ នាំឱ្យ

$$\int \sinh^2(ax) dx = \int \sinh^2(0) dx = \int \left(\frac{e^0 - e^{-0}}{2} \right)^2 dx = \int 0 dx = c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- ករណី $a \neq 0$ នាំឱ្យ

$$\begin{aligned} \int \sinh^2(ax) dx &= \int \left(\frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2} \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{4} \int \left((e^{ax})^2 - 2e^{ax}e^{-ax} + (e^{-ax})^2 \right) dx \\ &= \frac{1}{4} \int (e^{2ax} - 2 + e^{-2ax}) dx \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2a} e^{2ax} - 2x + \frac{1}{(-2a)} e^{-2ax} \right] + c \\ &= \frac{1}{4a} \sinh(2ax) - \frac{x}{2} + c \end{aligned}$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ដូចនេះ ចំពោះ $a \neq 0$ យើងបានរូបមន្ត

$$\boxed{\int \sinh^2(ax) dx = \frac{1}{4a} \sinh(2ax) - \frac{x}{2} + c} \quad (8.3)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ

ឧទាហរណ៍ទី៨ គណនា $\int \sinh^2(2x) dx$ និង $\int \sinh^2\left(\frac{3x}{2}\right) dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (8.3) យើងបាន៖

$$\int \sinh^2(2x) dx = \frac{1}{4 \cdot 2} \sinh(2 \cdot 2x) - \frac{x}{2} + c$$

$$= \frac{1}{8} \sinh(4x) - \frac{x}{2} + c$$

និង $\int \sinh^2\left(\frac{3x}{2}\right) dx = \frac{1}{4(3/2)} \sinh\left(2(3/2)x\right) - \frac{x}{2} + c$

$$= \frac{1}{6} \sinh(3x) - \frac{x}{2} + c \quad \text{។}$$

ឧទាហរណ៍ទី៩ គណនា $\int \sinh^2(3y-5) dy$ និង $\int_0^2 t \sinh^2\left(\frac{5t^2+4}{2}\right) dt$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $u = 3y - 5$ នាំឱ្យ $du = 3dy$ និង $dy = \frac{du}{3}$ ។

នាំឱ្យ $\int \sinh^2(3y-5) dy = \int \sinh^2 u \frac{du}{3} = \frac{1}{3} \int \sinh^2 u du$

$$= \frac{1}{3} \left[\frac{1}{4} \sinh(2u) - \frac{u}{2} \right] + c_1 \quad (\text{តាមរូបមន្ត (8.3)})$$

$$= \frac{1}{12} \sinh(2(3y-5)) - \frac{(3y-5)}{6} + c_1$$

$$= \frac{1}{12} \sinh(6y-10) - \frac{y}{2} + c \quad \text{។}$$

ចំពោះ $\int_0^2 t \sinh^2\left(\frac{5t^2+4}{2}\right) dt$ យើងតាង $u = \frac{5t^2+4}{2}$ នាំឱ្យ $du = 5t dt$ និង $t dt = \frac{du}{5}$ ។

ពេល $t = 0$ នោះ $u = \frac{5t^2+4}{2} = 2$ និងពេល $t = 2$ នោះ $u = \frac{5t^2+4}{2} = 12$ ។

នាំឱ្យ $\int_0^2 t \sinh^2\left(\frac{5t^2+4}{2}\right) dt = \int_2^{12} \sinh^2 u \left(\frac{du}{5}\right) = \frac{1}{5} \int_2^{12} \sinh^2 u du$

$$= \frac{1}{5} \left(\frac{1}{4} \sinh(2u) - \frac{u}{2} \right) \Big|_2^{12} \quad (\text{តាមរូបមន្ត (8.3)})$$

$$= \frac{1}{5} \left(\frac{1}{4} \sinh(2 \cdot 12) - \frac{12}{2} \right) - \frac{1}{5} \left(\frac{1}{4} \sinh(2 \cdot 2) - \frac{2}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{20} \sinh 24 - \frac{1}{20} \sinh 4 - 1 \approx 662228050.9 \quad \text{។}$$

៨.៥ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមានរាង $\int \cosh^2(ax) dx$

អាំងតេក្រាល $\int \cosh^2(ax) dx$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $\cosh^2(ax)$ ជាអនុគមន៍អ៊ីពែបូលីកកំណត់លើ $\mathbb{R}$ ។

យើងនឹងគណនាអាំងតេក្រាល $\int \cosh^2(ax) dx$ តាមករណីពីរគឺ $a=0$ និង $a \neq 0$ ។

- ករណី $a=0$ នាំឱ្យ

$$\int \cosh^2(ax) dx = \int \cosh^2(0) dx = \int \left(\frac{e^0 + e^{-0}}{2} \right)^2 dx = \int 1 dx = x + c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- ករណី $a \neq 0$ នាំឱ្យ

$$\begin{aligned} \int \cosh^2(ax) dx &= \int \left(\frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2} \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{4} \int \left((e^{ax})^2 + 2e^{ax}e^{-ax} + (e^{-ax})^2 \right) dx \\ &= \frac{1}{4} \int \left(e^{2ax} + 2 + e^{-2ax} \right) dx \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2a} e^{2ax} + 2x + \frac{1}{(-2a)} e^{-2ax} \right] + c \\ &= \frac{1}{4a} \sinh(2ax) + \frac{x}{2} + c \end{aligned}$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ដូចនេះ ចំពោះ $a \neq 0$ យើងបានរូបមន្ត

$$\boxed{\int \cosh^2(ax) dx = \frac{1}{4a} \sinh(2ax) + \frac{x}{2} + c} \quad (8.4)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ

ឧទាហរណ៍ទី១០ គណនា $\int \cosh^2(7x) dx$ និង $\int \cosh^2\left(-\frac{9x}{4}\right) dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (8.4) យើងបាន៖

$$\begin{aligned}\int \cosh^2(7x) dx &= \frac{1}{4 \cdot 7} \sinh(2 \cdot 7x) + \frac{x}{2} + c \\ &= \frac{1}{28} \sinh(14x) + \frac{x}{2} + c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{និង } \int \cosh^2\left(-\frac{9x}{4}\right) dx &= \frac{1}{4(-9/4)} \sinh\left(2(-9/4)x\right) + \frac{x}{2} + c \\ &= -\frac{1}{9} \sinh\left(\frac{-9x}{2}\right) + \frac{x}{2} + c \quad \text{។}\end{aligned}$$

ឧទាហរណ៍ទី១១ គណនា $\int_0^1 \cosh^2(4y-7) dy$ និង $\int_0^2 (2t-3) \cosh^2(2t^2-6t+5) dt$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $u = 4y - 7$ នាំឱ្យ $du = 4dy$ និង $dy = \frac{du}{4}$ ។

ពេល $y = 0$ នោះ $u = 4y - 7 = -7$ និងពេល $y = 1$ នោះ $u = 4y - 7 = -3$ ។

$$\begin{aligned}\text{នាំឱ្យ } \int_0^1 \cosh^2(4y-7) dy &= \int_{-7}^{-3} \cosh^2 u \frac{du}{4} = \frac{1}{4} \int_{-7}^{-3} \cosh^2 u du \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{4} \sinh(2u) + \frac{u}{2} \right] \Big|_{-7}^{-3} \quad (\text{តាមរូបមន្ត (8.4)}) \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{4} \sinh(-6) + \frac{-3}{2} \right] - \frac{1}{4} \left[\frac{1}{4} \sinh(-14) + \frac{-7}{2} \right] \\ &= \frac{1}{16} \sinh(-6) - \frac{1}{16} \sinh(-14) + \frac{1}{2} \approx 37569.2768 \quad \text{។}\end{aligned}$$

ចំពោះ $\int_0^2 (2t-3) \cosh^2(2t^2-6t+5) dt$ យើងតាង $u = 2t^2 - 6t + 5$ នាំឱ្យ

$du = (4t-6) dt = 2(2t-3) dt$ និង $(2t-3) dt = \frac{du}{2}$ ។ ពេល $t = 0$ នោះ

$u = 2t^2 - 6t + 5 = 5$ និងពេល $t = 2$ នោះ $u = 2t^2 - 6t + 5 = 1$ ។ នាំឱ្យ

$$\begin{aligned}
\int_0^2 (2t-3) \cosh^2(2t^2-6t+5) dt &= \int_5^1 \cosh^2 u \left(\frac{du}{2} \right) = \frac{1}{2} \int_5^1 \cosh^2 u \, du \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \sinh(2u) + \frac{u}{2} \right) \Big|_5^1 \quad (\text{តាមរូបមន្ត (8.4)}) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \sinh(2) + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \sinh(10) + \frac{5}{2} \right) \\
&= \frac{1}{8} \sinh 2 - \frac{1}{8} \sinh 10 - 1 \approx -1377.2007 \text{ ។}
\end{aligned}$$

៨.៦ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមានរាង $\int \tanh(ax) \, dx$

អាំងតេក្រាល $\int \tanh(ax) \, dx$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $\tanh(ax)$ ជាអនុគមន៍តង់ហ្សង់អ៊ីពែបូលីកកំណត់លើ $\mathbb{R}$ ។

យើងនឹងគណនាអាំងតេក្រាល $\int \tanh(ax) \, dx$ តាមករណីពីរគឺ $a=0$ និង $a \neq 0$ ។

- ករណី $a=0$ នាំឱ្យ

$$\int \tanh(ax) \, dx = \int \tanh(0) \, dx = \int \frac{\sinh(0)}{\cosh(0)} \, dx = \int 0 \, dx = c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- ករណី $a \neq 0$ នាំឱ្យ

$$\int \tanh(ax) \, dx = \int \frac{\sinh(ax)}{\cosh(ax)} \, dx \quad (*) \text{ ។}$$

$$\text{តាង } u = \cosh(ax) = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2} \text{ នាំឱ្យ } du = \frac{ae^{ax} + (-a)e^{-ax}}{2} \, dx = a \left(\frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2} \right) dx$$

$$= a \sinh(ax) \, dx \text{ និង } \sinh(ax) \, dx = \frac{du}{a} \text{ ។}$$

តាមសមីការ (*) យើងបាន៖

$$\begin{aligned}
\int \tanh(ax) \, dx &= \int \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{a} = \frac{1}{a} \int \frac{du}{u} \\
&= \frac{1}{a} \ln|u| + c = \frac{1}{a} \ln|\cosh(ax)| + c
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{a} \ln(\cosh(ax)) + c$$

(ពីព្រោះ $\cosh(ax) = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$) ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ដូចនេះ ចំពោះ $a \neq 0$ យើងបានរូបមន្ត

$$\int \tanh(ax) dx = \frac{1}{a} \ln(\cosh(ax)) + c \quad (8.5)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ

ឧទាហរណ៍ទី១២ គណនា $\int \tanh(3x) dx$ និង $\int_0^1 \tanh\left(\frac{5x}{3}\right) dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (8.5) យើងបាន៖

$$\int \tanh(3x) dx = \frac{1}{3} \ln(\cosh(3x)) + c$$

$$\begin{aligned} \text{និង} \quad \int_0^1 \tanh\left(\frac{5x}{3}\right) dx &= \frac{1}{(5/3)} \ln\left(\cosh\left(\frac{5x}{3}\right)\right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{3}{5} \ln\left(\cosh\left(\frac{5}{3}\right)\right) - \frac{3}{5} \ln(\cosh(0)) \\ &= \frac{3}{5} \ln\left(\cosh\left(\frac{5}{3}\right)\right) \approx 0.6051 \quad \text{។} \end{aligned}$$

ឧទាហរណ៍ទី១៣ គណនា $\int \tanh(3t-5) dt$ និង $\int_{-1}^1 u^2 \tanh(4u^3+7) du$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $u = 3t - 5$ នាំឱ្យ $du = 3dt$ និង $dt = \frac{du}{3}$ ។

$$\text{នាំឱ្យ} \quad \int \tanh(3t-5) dt = \int \tanh u \frac{du}{3} = \frac{1}{3} \int \tanh u du$$

$$= \frac{1}{3} \ln(\cosh u) + c \quad (\text{តាមរូបមន្ត (8.5)})$$

$$= \frac{1}{3} \ln(\cosh(3t-5)) + c \quad \text{។}$$

ចំពោះ $\int_{-1}^1 u^2 \tanh(4u^3 + 7) du$ យើងតាង $t = 4u^3 + 7$ នាំឱ្យ $dt = 12u^2 du$ និង

$u^2 du = \frac{dt}{12}$ ។ ពេល $u = -1$ នោះ $t = 4u^3 + 7 = 3$ និងពេល $u = 1$ នោះ $t = 4u^3 + 7 = 11$ ។

$$\text{នាំឱ្យ } \int_{-1}^1 u^2 \tanh(4u^3 + 7) du = \int_3^{11} \tanh t \frac{dt}{12} = \frac{1}{12} \int_3^{11} \tanh t dt$$

$$= \frac{1}{12} \ln(\cosh t) \Big|_3^{11} \quad (\text{តាមរូបមន្ត (8.5)})$$

$$= \frac{1}{12} \ln(\cosh 11) - \frac{1}{12} \ln(\cosh 3) \approx 0.6664 \quad \text{។}$$

៨.៧ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមានរាង $\int \coth(ax) dx$

អាំងតេក្រាល $\int \coth(ax) dx$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំង

តេក្រាល $\coth(ax)$ ជាអនុគមន៍កូតង់ហ្សង់អ៊ីពែបូលីកកំណត់ចំពោះ $x \neq 0$ ។

យើងនឹងគណនាអាំងតេក្រាល $\int \coth(ax) dx$ ចំពោះ $a \neq 0$ ។

យើងមាន $\int \coth(ax) dx = \int \frac{\cosh(ax)}{\sinh(ax)} dx$ (*) ។

$$\text{តាង } u = \sinh(ax) = \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2} \text{ នាំឱ្យ } du = \frac{ae^{ax} - (-a)e^{-ax}}{2} dx = a \left(\frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2} \right) dx$$

$$= a \cosh(ax) dx \text{ និង } \cosh(ax) dx = \frac{du}{a} \quad \text{។}$$

តាមសមីការ (*) យើងបាន៖

$$\begin{aligned} \int \coth(ax) dx &= \int \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{a} = \frac{1}{a} \int \frac{du}{u} \\ &= \frac{1}{a} \ln|u| + c = \frac{1}{a} \ln|\sinh(ax)| + c \end{aligned}$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ដូចនេះ ចំពោះ $a \neq 0$ យើងបានរូបមន្ត

$$\int \coth(ax) dx = \frac{1}{a} \ln |\sinh(ax)| + c \quad (8.6)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ

ឧទាហរណ៍ទី១៤ គណនា $\int \coth(-5x) dx$ និង $\int_1^2 \coth\left(\frac{8x}{5}\right) dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (8.6) យើងបាន៖

$$\int \coth(-5x) dx = -\frac{1}{5} \ln |\sinh(-5x)| + c$$

$$\begin{aligned} \text{និង} \quad \int_1^2 \coth\left(\frac{8x}{5}\right) dx &= \frac{1}{(8/5)} \ln \left| \sinh\left(\frac{8x}{5}\right) \right| \Big|_1^2 \\ &= \frac{5}{8} \ln \left(\sinh\left(\frac{16}{5}\right) \right) - \frac{5}{8} \ln \left(\sinh\left(\frac{8}{5}\right) \right) \approx 1.0249 \quad \text{។} \end{aligned}$$

ឧទាហរណ៍ទី១៥ គណនា $\int \coth(12x+123) dx$ និង $\int_0^1 t^4 \coth(2t^5+7) dt$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $u = 12x + 123$ នាំឱ្យ $du = 12 dx$ និង $dx = \frac{du}{12}$ ។

$$\text{នាំឱ្យ} \quad \int \coth(12x+123) dx = \int \coth u \frac{du}{12} = \frac{1}{12} \int \coth u du$$

$$= \frac{1}{12} \ln |\sinh u| + c \quad (\text{តាមរូបមន្ត (8.6)})$$

$$= \frac{1}{12} \ln |\sinh(12x+123)| + c \quad \text{។}$$

ចំពោះ $\int_0^1 t^4 \coth(2t^5+7) dt$ យើងតាង $u = 2t^5 + 7$ នាំឱ្យ $du = 10t^4 dt$ និង

$$\frac{du}{10} = t^4 dt \quad \text{។} \quad \text{ពេល } t = 0 \text{ នោះ } u = 2t^5 + 7 = 7 \text{ និងពេល } t = 1 \text{ នោះ } u = 2t^5 + 7 = 9 \quad \text{។}$$

$$\text{នាំឱ្យ} \quad \int_0^1 t^4 \coth(2t^5+7) dt = \int_7^9 \coth u \frac{du}{10} = \frac{1}{10} \int_7^9 \coth u du$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{10} \ln |\sinh u| \Big|_7^9 \quad (\text{តាមរូបមន្ត (8.6)}) \\
&= \frac{1}{10} \ln |\sinh 9| - \frac{1}{10} \ln |\sinh 7| \\
&= \frac{1}{10} \ln \left| \frac{\sinh 9}{\sinh 7} \right| \approx 0.2000 \quad \text{។}
\end{aligned}$$

៨.៨ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមានរាង $\int \operatorname{sech}(ax) dx$

អាំងតេក្រាល $\int \operatorname{sech}(ax) dx$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $\operatorname{sech}(ax)$ ជាអនុគមន៍សេកង់អ៊ីពែបូលីកកំណត់លើ $\mathbb{R}$ ។

យើងនឹងគណនាអាំងតេក្រាល $\int \operatorname{sech}(ax) dx$ តាមករណីពីរគឺ $a=0$ និង $a \neq 0$ ។

យើងមាន $\operatorname{sech}(ax) = \frac{1}{\cosh(ax)} = \frac{2}{e^{ax} + e^{-ax}} = \frac{2e^{ax}}{(e^{ax})^2 + 1}$ ។

- ករណី $a=0$ នាំឱ្យ

$$\int \operatorname{sech}(ax) dx = \int \operatorname{sech}(0) dx = \int \frac{2}{e^0 + e^0} dx = \int 1 dx = x + c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- ករណី $a \neq 0$ យើងតាង $t = e^{ax}$ នាំឱ្យ $dt = ae^{ax} dx$ និង $e^{ax} dx = \frac{dt}{a}$ ។

$$\text{នាំឱ្យ} \quad \int \operatorname{sech}(ax) dx = \int \frac{2e^{ax} dx}{(e^{ax})^2 + 1} = \int \frac{2}{t^2 + 1} \cdot \frac{dt}{a}$$

$$= \frac{2}{a} \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{2}{a} \arctan t + c$$

$$= \frac{2}{a} \arctan e^{ax} + c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ម្យ៉ាងទៀត យើងមាន $\cosh^2(ax) - \sinh^2(ax) = 1$ នាំឱ្យ $\cosh^2(ax) = \sinh^2(ax) + 1$ ។

$$\text{នាំឱ្យ} \quad \int \operatorname{sech}(ax) dx = \int \frac{1}{\cosh(ax)} dx = \int \frac{\cosh(ax)}{\cosh^2(ax)} dx$$

$$= \int \frac{\cosh(ax)}{\sinh^2(ax) + 1} dx \quad (*) \quad \text{។}$$

បន្ទាប់មក យើងតាង $t = \sinh(ax) = \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2}$ នាំឱ្យ $dt = \frac{ae^{ax} - (-a)e^{-ax}}{2} dx$

$$= a \left(\frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2} \right) dx = a \cosh(ax) dx \quad \text{និង} \quad \cosh(ax) dx = \frac{dt}{a} \quad \text{។}$$

តាមសមីការ (*) យើងបាន៖

$$\int \operatorname{sech}(ax) dx = \int \frac{\cosh(ax)}{\sinh^2(ax) + 1} dx = \int \frac{1}{t^2 + 1} \frac{dt}{a}$$

$$= \frac{1}{a} \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{1}{a} \arctan t + c_1$$

$$= \frac{1}{a} \arctan(\sinh(ax)) + c_1$$

ដែល c_1 ជាចំនួនពិតថេរ។

ដូចនេះ ចំពោះ $a \neq 0$ យើងបានរូបមន្ត

$$\int \operatorname{sech}(ax) dx = \frac{2}{a} \arctan e^{ax} + c = \frac{1}{a} \arctan(\sinh(ax)) + c_1 \quad (8.7)$$

ដែល c, c_1 ជាចំនួនពិតថេរ។

ឧទាហរណ៍ទី១៦ គណនា $\int \operatorname{sech}(6x) dx$ និង $\int_0^1 \operatorname{sech}\left(\frac{-3t}{2}\right) dt$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (8.7) យើងបាន៖

$$\int \operatorname{sech}(6x) dx = \frac{2}{6} \arctan e^{6x} + c = \frac{1}{3} \arctan e^{6x} + c$$

និង

$$\int_0^1 \operatorname{sech}\left(\frac{-3t}{2}\right) dt = \frac{2}{(-3/2)} \arctan e^{-\frac{3t}{2}} \Big|_0^1$$

$$= -\frac{4}{3} \arctan e^{-\frac{3}{2}} + \frac{4}{3} \arctan e^0$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{4}{3} \arctan e^{-\frac{3}{2}} + \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi}{4} \\
 &= -\frac{4}{3} \arctan e^{-\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{3} \approx 0.7544 \text{ ។}
 \end{aligned}$$

ឧទាហរណ៍ទី១៧ គណនា $\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}(9x-15) dx$ និង $\int_0^{+\infty} t^2 \operatorname{sech}(-2t^3+17) dt$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $u=9x-15$ នាំឱ្យ $du=9dx$ និង $dx=\frac{du}{9}$ ។ ពេល $x \rightarrow +\infty$ នោះ $u \rightarrow +\infty$

និងពេល $x \rightarrow -\infty$ នោះ $u \rightarrow -\infty$ ។ នាំឱ្យ

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}(9x-15) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech} u \frac{du}{9} = \frac{1}{9} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech} u du \\
 &= \frac{1}{9} \lim_{N \rightarrow -\infty} \int_N^0 \operatorname{sech} u du + \frac{1}{9} \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_0^M \operatorname{sech} u du \\
 &= \frac{2}{9} \lim_{N \rightarrow -\infty} \arctan e^u \Big|_N^0 + \frac{2}{9} \lim_{M \rightarrow +\infty} \arctan e^u \Big|_0^M \quad (\text{រូបមន្ត (8.7)}) \\
 &= \frac{2}{9} \lim_{N \rightarrow -\infty} (\arctan e^0 - \arctan e^N) + \frac{2}{9} \lim_{M \rightarrow +\infty} (\arctan e^M - \arctan e^0) \\
 &= \frac{2}{9} \left(\frac{\pi}{4} - \arctan 0 \right) + \frac{2}{9} \left(\arctan(+\infty) - \frac{\pi}{4} \right) \\
 &= \frac{\pi}{18} + \frac{2}{9} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{18} = \frac{\pi}{9} \text{ ។}
 \end{aligned}$$

ចំពោះ $\int_0^{+\infty} t^2 \operatorname{sech}(-2t^3+17) dt$ យើងតាង $u=-2t^3+17$ នាំឱ្យ $du=-6t^2 dt$ និង

$t^2 dt = -\frac{du}{6}$ ។ ពេល $t=0$ នោះ $u=-2t^3+17=17$ និងពេល $t \rightarrow +\infty$ នោះ $u \rightarrow -\infty$ ។

$$\begin{aligned}
 \text{នាំឱ្យ } \int_0^{+\infty} t^2 \operatorname{sech}(-2t^3+17) dt &= \int_{17}^{+\infty} \operatorname{sech} u \left(-\frac{du}{6} \right) \\
 &= -\frac{1}{6} \int_{17}^{+\infty} \operatorname{sech} u du = -\frac{1}{6} \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_{17}^M \operatorname{sech} u du \\
 &= -\frac{1}{6} \lim_{M \rightarrow +\infty} \arctan e^u \Big|_{17}^M \quad (\text{តាមរូបមន្ត (8.7)})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{6} \lim_{M \rightarrow +\infty} (\arctan e^M - \arctan 17) \\
&= -\frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan e^{17} \right) \approx 0 \quad \text{។}
\end{aligned}$$

៨.៩ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមានរាង $\int \operatorname{cosech}(ax) dx$

អាំងតេក្រាល $\int \operatorname{cosech}(ax) dx$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍

អាំងតេក្រាល $\operatorname{cosech}(ax)$ ជាអនុគមន៍កូសេកង់អ៊ីពែបូលីកកំណត់លើ $\mathbb{R}^*$ ដែល $a \neq 0$ ។

យើងនឹងគណនាអាំងតេក្រាល $\int \operatorname{cosech}(ax) dx$ ដែល $a \neq 0$ ។

យើងមាន $\operatorname{cosech}(ax) = \frac{1}{\sinh(ax)} = \frac{2}{e^{ax} - e^{-ax}} = \frac{2e^{ax}}{(e^{ax})^2 - 1}$ ។

យើងតាង $t = e^{ax}$ នាំឱ្យ $dt = ae^{ax} dx$ និង $e^{ax} dx = \frac{dt}{a}$ ។

$$\begin{aligned}
\text{នាំឱ្យ } \int \operatorname{cosech}(ax) dx &= \int \frac{dx}{\sinh(ax)} = \int \frac{2e^{ax} dx}{(e^{ax})^2 - 1} \\
&= \int \frac{2}{t^2 - 1} \cdot \frac{dt}{a} = \frac{2}{a} \int \frac{dt}{t^2 - 1} \\
&= \frac{2}{a} \cdot \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + c = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{e^{ax} - 1}{e^{ax} + 1} \right| + c \quad (*) \quad \text{។}
\end{aligned}$$

ម្យ៉ាងទៀត យើងមាន

$$\begin{aligned}
\tanh \frac{ax}{2} &= \frac{e^{ax/2} - e^{-ax/2}}{e^{ax/2} + e^{-ax/2}} = \frac{e^{ax} - 1}{e^{ax} + 1} \\
\frac{\cosh(ax) - 1}{\sinh(ax)} &= \frac{\frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2} - 1}{\frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2}} = \frac{e^{ax} + e^{-ax} - 2}{e^{ax} - e^{-ax}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ហើយ } \sqrt{\frac{\cosh(ax)-1}{\cosh(ax)+1}} &= \sqrt{\frac{\frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2}-1}{\frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2}+1}} = \sqrt{\frac{e^{ax}+e^{-ax}-2}{e^{ax}+e^{-ax}+2}} \\
 &= \sqrt{\frac{e^{2ax}+1-2e^{ax}}{e^{2ax}+1+2e^{ax}}} = \sqrt{\frac{(e^{ax}-1)^2}{(e^{ax}+1)^2}} = \frac{e^{ax}-1}{e^{ax}+1} \text{ ។}
 \end{aligned}$$

ដូចនេះ តាមសមីការ(*) និងចំពោះ $a \neq 0$ យើងបានរូបមន្ត

$$\begin{aligned}
 \int \operatorname{cosech}(ax) dx &= \int \frac{dx}{\sinh(ax)} = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{e^{ax}-1}{e^{ax}+1} \right| + c = \frac{1}{a} \ln \left| \tanh \frac{ax}{2} \right| + c \\
 &= \frac{1}{a} \ln \left| \frac{\cosh(ax)-1}{\sinh(ax)} \right| + c = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{\cosh(ax)-1}{\cosh(ax)+1} \right| + c
 \end{aligned} \quad (8.8)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ឧទាហរណ៍ទី១៨ គណនា $\int \operatorname{cosech}(7x) dx$ និង $\int_1^2 \frac{dx}{\sinh\left(\frac{5x}{2}\right)}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (8.8) យើងបាន៖

$$\int \operatorname{cosech}(7x) dx = \frac{1}{7} \ln \left| \tanh \frac{7x}{2} \right| + c$$

$$\begin{aligned}
 \text{និង } \int_1^2 \frac{dx}{\sinh\left(\frac{5x}{2}\right)} &= \frac{1}{(5/2)} \ln \left| \frac{e^{5x/2}-1}{e^{5x/2}+1} \right| \Big|_1^2 \\
 &= \frac{2}{5} \ln \left| \frac{e^5-1}{e^5+1} \right| - \frac{2}{5} \ln \left| \frac{e^{5/2}-1}{e^{5/2}+1} \right| \\
 &= \frac{2}{5} \ln \frac{(e^5-1)(e^{5/2}+1)}{(e^5+1)(e^{5/2}-1)} \approx 0.0604 \text{ ។}
 \end{aligned}$$

ឧទាហរណ៍ទី១៩ គណនា $\int_0^{+\infty} \operatorname{cosech}(8x+5) dx$ និង $\int_0^{+\infty} t^3 \operatorname{cosech}(-2t^4-3) dt$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $u = 8x + 5$ នាំឱ្យ $du = 8dx$ និង $dx = \frac{du}{8}$ ។ ពេល $x \rightarrow +\infty$ នោះ $u \rightarrow +\infty$ និង

ពេល $x = 0$ នោះ $u = 5$ ។

$$\text{នាំឱ្យ} \quad \int_0^{+\infty} \operatorname{cosech}(8x+5) dx = \int_5^{+\infty} \operatorname{cosech} u \frac{du}{8} = \frac{1}{8} \int_5^{+\infty} \operatorname{cosech} u du$$

$$= \frac{1}{8} \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_5^N \operatorname{cosech} u du$$

$$= \frac{1}{8} \lim_{N \rightarrow +\infty} \ln \left| \frac{e^u - 1}{e^u + 1} \right| \Bigg|_5^N \quad (\text{តាមរូបមន្ត (8.8)})$$

$$= \frac{1}{8} \lim_{N \rightarrow +\infty} \ln \left| \frac{e^N - 1}{e^N + 1} \right| - \ln \left| \frac{e^5 - 1}{e^5 + 1} \right|$$

$$= \frac{1}{8} \lim_{N \rightarrow +\infty} \ln \left| \frac{1 - 1/e^N}{1 + 1/e^N} \right| - \ln \left| \frac{e^5 - 1}{e^5 + 1} \right|$$

$$= -\frac{1}{8} \ln \frac{e^5 - 1}{e^5 + 1} \approx 0.0016 \quad \text{។}$$

ចំពោះ $\int_0^{+\infty} t^3 \operatorname{cosech}(-2t^4 - 3) dt$ យើងតាង $u = -2t^4 - 3$ នាំឱ្យ $du = -8t^3 dt$ និង

$t^3 dt = -\frac{du}{8}$ ។ ពេល $t = 0$ នោះ $u = -2t^4 - 3 = -3$ និងពេល $t \rightarrow +\infty$ នោះ $u \rightarrow -\infty$ ។

$$\text{នាំឱ្យ} \quad \int_0^{+\infty} t^3 \operatorname{cosech}(-2t^4 - 3) dt = \int_{-3}^{-\infty} \operatorname{cosech} u \left(-\frac{du}{8} \right)$$

$$= \frac{1}{8} \int_{-\infty}^{-3} \operatorname{cosech} u du = \frac{1}{8} \lim_{M \rightarrow -\infty} \int_M^{-3} \operatorname{cosech} u du$$

$$= \frac{1}{8} \lim_{M \rightarrow -\infty} \ln \left| \frac{e^u - 1}{e^u + 1} \right| \Bigg|_M^{-3} \quad (\text{តាមរូបមន្ត (8.8)})$$

$$= \frac{1}{8} \lim_{M \rightarrow -\infty} \left[\ln \left| \frac{e^{-3} - 1}{e^{-3} + 1} \right| - \ln \left| \frac{e^M - 1}{e^M + 1} \right| \right]$$

$$= \frac{1}{8} \ln \left| \frac{e^{-3}-1}{e^{-3}+1} \right| = \frac{1}{8} \ln \left(\frac{1-e^{-3}}{1+e^{-3}} \right) \approx -0.0124 \quad \text{។}$$

៨.១០ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមានរាង $\int \frac{dx}{\cosh^2(ax)}$

អាំងតេក្រាល $\int \frac{dx}{\cosh^2(ax)}$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេ

ក្រាល $\frac{1}{\cosh^2(ax)}$ ជាអនុគមន៍អ៊ីពែបូលីកកំណត់លើ $\mathbb{R}$ ។

យើងនឹងគណនាអាំងតេក្រាល $\int \frac{dx}{\cosh^2(ax)}$ តាមករណីពីរគឺ $a=0$ និង $a \neq 0$ ។

$$\begin{aligned} \text{យើងមាន } \cosh^2(ax) &= \left(\frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} (e^{2ax} + 2e^{ax}e^{-ax} + e^{-2ax}) \\ &= \frac{1}{4} (e^{2ax} + 2 + e^{-2ax}) \end{aligned}$$

$$\text{និង } \frac{1}{\cosh^2(ax)} = \frac{4}{e^{2ax} + 2 + e^{-2ax}} \quad \text{។}$$

- ករណី $a=0$ នាំឱ្យ

$$\int \frac{dx}{\cosh^2(ax)} = \int \frac{4}{e^{2ax} + 2 + e^{-2ax}} dx = \int dx = x + c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- ករណី $a \neq 0$ យើងតាង $t = e^{2ax}$ នាំឱ្យ $2ax = \ln t$, $x = \frac{\ln t}{2a}$ និង $dx = \frac{dt}{2at}$ ។

$$\begin{aligned} \text{នាំឱ្យ } \int \frac{dx}{\cosh^2(ax)} &= \int \frac{4}{e^{2ax} + 2 + e^{-2ax}} dx = \int \frac{4}{t + 2 + t^{-1}} \cdot \frac{dt}{2at} \\ &= \frac{2}{a} \int \frac{dt}{t^2 + 2t + 1} = \frac{2}{a} \int \frac{dt}{(t+1)^2} \\ &= \frac{2}{a} \int (t+1)^{-2} dt = \frac{2}{a} \cdot \frac{(t+1)^{-1}}{(-1)} + c \\ &= -\frac{2}{a} \cdot \frac{1}{t+1} + c = \frac{1}{a} \left(-\frac{2}{e^{2ax} + 1} \right) + c \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{a} [\tanh(ax) - 1] + c = \frac{1}{a} \tanh(ax) + c_1$$

$$\begin{aligned} \text{ពីព្រោះ: } \tanh(ax) &= \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{e^{ax} + e^{-ax}} = \frac{e^{2ax} - 1}{e^{2ax} + 1} \\ &= \frac{(e^{2ax} + 1) - 2}{e^{2ax} + 1} = 1 - \frac{2}{e^{2ax} + 1} \end{aligned}$$

$$\text{នាំឱ្យ } -\frac{2}{e^{2ax} + 1} = \tanh(ax) - 1$$

ដែល c, c_1 ជាចំនួនពិតថេរ។

ដូចនេះ ចំពោះ $a \neq 0$ យើងបានរូបមន្ត

$$\boxed{\int \frac{dx}{\cosh^2(ax)} = -\frac{2}{a(e^{2ax} + 1)} + c = \frac{1}{a} \tanh(ax) + c_1} \quad (8.9)$$

ដែល c, c_1 ជាចំនួនពិតថេរ។

ឧទាហរណ៍ទី២០ គណនា $\int \frac{dx}{\cosh^2(3x)}$ និង $\int_0^1 \frac{dx}{\cosh^2(5x)}$ ។
ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (8.9) យើងបាន៖

$$\int \frac{dx}{\cosh^2(3x)} = \frac{1}{3} \tanh(3x) + c_1$$

$$\text{និង } \int_0^1 \frac{dx}{\cosh^2(5x)} = -\frac{2}{5(e^{10x} + 1)} \Big|_0^1 = -\frac{2}{5(e^{10} + 1)} + \frac{1}{5} \approx 0.1999 \quad \text{។}$$

ឧទាហរណ៍ទី២១ គណនា $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\cosh^2(12x-123)}$ និង $\int_0^{+\infty} \frac{(t-1) dt}{\cosh^2(12t^2-24t)}$ ។
ដំណោះស្រាយ

តាង $u = 12x - 123$ នាំឱ្យ $du = 12 dx$ និង $dx = \frac{du}{12}$ ។ ពេល $x \rightarrow +\infty$ នោះ

$u \rightarrow +\infty$ និងពេល $x \rightarrow -\infty$ នោះ $u \rightarrow -\infty$ ។

$$\text{នាំឱ្យ } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\cosh^2(12x-123)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\cosh^2 u} \cdot \frac{du}{12} = \frac{1}{12} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{\cosh^2 u}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{12} \lim_{N \rightarrow -\infty} \int_N^0 \frac{du}{\cosh^2 u} + \frac{1}{12} \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_0^M \frac{du}{\cosh^2 u} \\
&= \frac{1}{12} \lim_{N \rightarrow -\infty} \left. \frac{-2}{e^{2x} + 1} \right|_N^0 + \frac{1}{12} \lim_{M \rightarrow +\infty} \left. \frac{-2}{e^{2x} + 1} \right|_0^M \quad (\text{រូបមន្ត (8.9)}) \\
&= \frac{1}{12} \lim_{N \rightarrow -\infty} \left(\frac{-2}{e^0 + 1} + \frac{2}{e^{2N} + 1} \right) + \frac{1}{12} \lim_{M \rightarrow +\infty} \left(\frac{-2}{e^{2M} + 1} + \frac{2}{e^0 + 1} \right) \\
&= \frac{1}{12}(-1+2) + \frac{1}{12}(0+1) = \frac{1}{6} \approx 0.1666 \quad \text{។}
\end{aligned}$$

ចំពោះ $\int_0^{+\infty} \frac{(t-1) dt}{\cosh^2(12t^2 - 24t)}$ យើងតាង $u = 12t^2 - 24t$ នាំឱ្យ $du = (24t - 24)dt$
 $= 24(t-1)dt$ និង $(t-1)dt = \frac{du}{24}$ ។ ពេល $t = 0$ នោះ $u = 12t^2 - 24t = 0$ និងពេល
 $t \rightarrow +\infty$ នោះ $u \rightarrow +\infty$ ។

$$\begin{aligned}
\text{នាំឱ្យ } \int_0^{+\infty} \frac{(t-1) dt}{\cosh^2(12t^2 - 24t)} &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\cosh^2 u} \cdot \frac{du}{24} = \frac{1}{24} \int_0^{+\infty} \frac{du}{\cosh^2 u} \\
&= \frac{1}{24} \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_0^M \frac{du}{\cosh^2 u} \\
&= \frac{1}{24} \lim_{M \rightarrow +\infty} \left. \frac{-2}{e^{2x} + 1} \right|_0^M \quad (\text{តាមរូបមន្ត (8.9)}) \\
&= \frac{1}{24} \lim_{M \rightarrow +\infty} \left(\frac{-2}{e^{2M} + 1} - \frac{(-2)}{e^0 + 1} \right) \\
&= \frac{1}{24}(0+1) = \frac{1}{24} \approx 0.0416 \quad \text{។}
\end{aligned}$$

៨.១១ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមានរាង $\int \frac{dx}{\sinh^2(ax)}$

អាំងតេក្រាល $\int \frac{dx}{\sinh^2(ax)}$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេ

ក្រាល $\frac{1}{\sinh^2(ax)}$ ជាអនុគមន៍អ៊ីពែបូលីកកំណត់លើ $\mathbb{R}^*$ ដែល $a \neq 0$ ។

យើងនឹងគណនាអាំងតេក្រាល $\int \frac{dx}{\sinh^2(ax)}$ ដែល $a \neq 0$ ។

$$\begin{aligned}\text{យើងមាន } \sinh^2(ax) &= \left(\frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} (e^{2ax} - 2e^{ax}e^{-ax} + e^{-2ax}) \\ &= \frac{1}{4} (e^{2ax} - 2 + e^{-2ax})\end{aligned}$$

$$\text{និង } \frac{1}{\sinh^2(ax)} = \frac{4}{e^{2ax} - 2 + e^{-2ax}} \quad \text{។}$$

$$\text{យើងតាង } t = e^{2ax} \text{ នាំឱ្យ } 2ax = \ln t, \quad x = \frac{\ln t}{2a} \quad \text{និង } dx = \frac{dt}{2at} \quad \text{។}$$

$$\begin{aligned}\text{នាំឱ្យ } \int \frac{dx}{\sinh^2(ax)} &= \int \frac{4}{e^{2ax} - 2 + e^{-2ax}} dx = \int \frac{4}{t - 2 + t^{-1}} \cdot \frac{dt}{2at} \\ &= \frac{2}{a} \int \frac{dt}{t^2 - 2t + 1} = \frac{2}{a} \int \frac{dt}{(t-1)^2} \\ &= \frac{2}{a} \int (t-1)^{-2} dt = \frac{2}{a} \cdot \frac{(t-1)^{-1}}{(-1)} + c \\ &= -\frac{2}{a} \cdot \frac{1}{t-1} + c = -\frac{1}{a} \cdot \frac{2}{e^{2ax} - 1} + c \\ &= -\frac{1}{a} [\coth(ax) - 1] + c = -\frac{1}{a} \coth(ax) + c_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ពីព្រោះ } \coth(ax) &= \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{e^{ax} - e^{-ax}} = \frac{e^{2ax} + 1}{e^{2ax} - 1} \\ &= \frac{(e^{2ax} - 1) + 2}{e^{2ax} - 1} = 1 + \frac{2}{e^{2ax} - 1}\end{aligned}$$

$$\text{នាំឱ្យ } \frac{2}{e^{2ax} - 1} = \coth(ax) - 1$$

ដែល c, c_1 ជាចំនួនពិតថេរ។

ដូចនេះ ចំពោះ $a \neq 0$ យើងបានរូបមន្ត

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sinh^2(ax)} = -\frac{2}{a(e^{2ax} - 1)} + c = -\frac{1}{a} \coth(ax) + c_1} \quad (8.10)$$

ដែល c, c_1 ជាចំនួនពិតថេរ។

ឧទាហរណ៍ទី២២ គណនា $\int \frac{dx}{\sinh^2(2x)}$ និង $\int_{0.5}^1 \frac{dx}{\sinh^2(1.5x)}$ ។
ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (8.10) យើងបាន៖

$$\int \frac{dx}{\sinh^2(2x)} = -\frac{1}{2} \coth(2x) + c_1$$

$$\begin{aligned} \text{និង} \quad \int_{0.5}^1 \frac{dx}{\sinh^2(1.5x)} &= -\frac{2}{1.5(e^{3x}-1)} \Big|_{0.5}^1 \\ &= -\frac{2}{1.5(e^3-1)} + \frac{2}{1.5(e^{1.5}-1)} \approx 0.3130 \quad \text{។} \end{aligned}$$

ឧទាហរណ៍ទី២៣ គណនា $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sinh^2(-8x-12)}$ និង $\int_0^{+\infty} \frac{(3e^t-5)dt}{\sinh^2(6e^t-10t+7)}$ ។
ដំណោះស្រាយ

តាង $u = -8x-12$ នាំឱ្យ $du = -8dx$ និង $dx = -\frac{du}{8}$ ។ ពេល $x \rightarrow +\infty$ នោះ

$u \rightarrow -\infty$ និងពេល $x \rightarrow 0$ នោះ $u \rightarrow -12$ ។

$$\begin{aligned} \text{នាំឱ្យ} \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sinh^2(-8x-12)} &= \int_{-12}^{-\infty} \frac{1}{\sinh^2 u} \cdot \left(-\frac{du}{8}\right) = -\frac{1}{8} \int_{-12}^{-\infty} \frac{du}{\sinh^2 u} \\ &= \frac{1}{8} \int_{-\infty}^{-12} \frac{du}{\sinh^2 u} = \frac{1}{8} \lim_{N \rightarrow -\infty} \int_N^{-12} \frac{du}{\sinh^2 u} \\ &= \frac{1}{8} \lim_{N \rightarrow -\infty} \left. \frac{-2}{e^{2x}-1} \right|_N^{-12} \quad (\text{តាមរូបមន្ត (8.10)}) \\ &= \frac{1}{8} \lim_{N \rightarrow -\infty} \left(\frac{-2}{e^{-24}-1} + \frac{2}{e^{2N}-1} \right) \\ &= \frac{1}{8} \left(\frac{-2}{e^{-24}-1} - 2 \right) \quad \text{។} \end{aligned}$$

ចំពោះ $\int_0^{+\infty} \frac{(3e^t-5)dt}{\sinh^2(6e^t-10t+7)}$ យើងតាង $u = 6e^t-10t+7$ នាំឱ្យ $du = (6e^t-10)dt$

$$= 2(3e^t - 5)dt \text{ និង } (3e^t - 5)dt = \frac{du}{2} \text{ ។ ពេល } t=0 \text{ នោះ } u=13 \text{ និងពេល } t \rightarrow +\infty$$

នោះ $u \rightarrow +\infty$ ។

$$\begin{aligned} \text{នាំឱ្យ } \int_0^{+\infty} \frac{(3e^t - 5) dt}{\sinh^2(6e^t - 10t + 7)} &= \int_{13}^{+\infty} \frac{1}{\sinh^2 u} \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int_{13}^{+\infty} \frac{du}{\sinh^2 u} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_{13}^M \frac{du}{\sinh^2 u} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow +\infty} \left. \frac{-2}{e^{2x} - 1} \right|_{13}^N \text{ (តាមរូបមន្ត (8.10))} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{-2}{e^{2N} - 1} + \frac{2}{e^{26} - 1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(0 + \frac{2}{e^{26} - 1} \right) = \frac{1}{e^{26} - 1} \text{ ។} \end{aligned}$$

ជាសរុប ជំពូកទី៨នេះបានផ្តល់នូវនិយមន័យនិងលក្ខណៈនៃអនុគមន៍អ៊ីពែបូលីក ហើយនិងវិធីសាស្ត្រគណនាអាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍អ៊ីពែបូលីកដែលមានទម្រង់ពិសេស មួយចំនួនដូចជា $\int \sinh(ax) dx$, $\int \cosh(ax) dx$, $\int \sinh^2(ax) dx$, $\int \cosh^2(ax) dx$, $\int \tanh(ax) dx$, $\int \coth(ax) dx$, $\int \operatorname{sech}(ax) dx$, $\int \operatorname{cosech}(ax) dx$, $\int \frac{dx}{\cosh^2(ax)}$ និង $\int \frac{dx}{\sinh^2(ax)}$ ដោយបង្កើតជារូបមន្តដើម្បីយកមកប្រើប្រាស់ជាលក្ខណៈទូទៅនិងបាន អនុវត្តន៍លើឧទាហរណ៍មួយចំនួន។

ការសន្និដ្ឋាន

ជារួមមកវិញ យើងឃើញថា ជំពូកទី១បានបង្ហាញនូវនិយមន័យនៃព្រីមីទីវនិងអាំងតេក្រាល ទ្រឹស្តីបទ រូបមន្តគ្រឹះ ហើយលក្ខណៈជាច្រើននៃអាំងតេក្រាលមិនកំណត់និងអាំងតេក្រាលកំណត់។ ជាងនេះទៅទៀត ជំពូកទី១នេះបានផ្តល់នូវវិធីសាស្ត្រគណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ អាំងតេក្រាលកំណត់ និង អាំងតេក្រាល Improper តាមនិយមន័យ រូបមន្តងាយ វិធីបូរេម៉ែរ និង វិធីអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកដោយអនុវត្តន៍លើឧទាហរណ៍មួយចំនួន។

ចំណែកជំពូកទី២បានផ្តល់នូវវិធីសាស្ត្រនៃការបំបែកអនុគមន៍សនិទានក្នុង $\mathbb{R}$ និង វិធីសាស្ត្រគណនាអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍សនិទានមួយចំនួនដូចជា $\int \frac{1}{(ax+b)^n} dx$, $\int \frac{dx}{x^2 \pm a^2}$, $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$, $\int \frac{(a_1x+b_1)dx}{ax^2+bx+c}$, $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^m}$ និង $\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^m}$ ដោយបង្កើតជារូបមន្តដើម្បីយកមកប្រើប្រាស់ជាលក្ខណៈទូទៅនិងបានអនុវត្តន៍លើឧទាហរណ៍មួយចំនួន។

ចំពោះជំពូកទី៣បានផ្តល់នូវវិធីសាស្ត្រគណនាអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អសនិទានមួយចំនួនដូចជា $\int \frac{1}{\sqrt[n]{ax+b}} dx$, $\int \sqrt[n]{ax+b} dx$, $\int \sqrt[n]{(ax+b)^m} dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{k-x^2}} dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+k}} dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-k}} dx$, $\int \sqrt{k-x^2} dx$, $\int \sqrt{x^2+k} dx$, $\int \sqrt{x^2-k} dx$, $\int (\alpha x + \beta) \sqrt{ax+b} dx$, $\int \frac{dx}{(\alpha x + \beta) \sqrt{ax+b}}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $\int \sqrt{ax^2+bx+c} dx$ និង $\int \frac{(\alpha x + \beta) dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ ដោយបង្កើតជារូបមន្តដើម្បីយកមកប្រើប្រាស់ជាលក្ខណៈទូទៅនិងបានអនុវត្តន៍លើឧទាហរណ៍មួយចំនួន។

ចំពោះជំពូកទី៤បានផ្តល់នូវវិធីសាស្ត្រគណនាអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនិងអាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលមួយចំនួនដូចជា $\int a^{\alpha x + \beta} dx$, $\int e^{\alpha x + \beta} dx$, $\int \frac{dx}{p + qa^{\alpha x}}$, $\int \frac{dx}{(p + qa^{\alpha x})^2}$, $\int \frac{a^{2\alpha x} dx}{p + qa^{\alpha x}}$, $\int \frac{dx}{pa^{\alpha x} + qa^{-\alpha x}}$,

$\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx, \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx, \int_{\mu}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx, \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx,$
 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+bx+c)} dx, \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} e^{-2bx} dx$ និង $\int_{-b/2a}^{+\infty} e^{-(ax^2+bx+c)} dx$ ដោយបង្កើតជា
 រូបមន្តដើម្បីយកមកប្រើប្រាស់ជាលក្ខណៈទូទៅនិងបានអនុវត្តន៍លើឧទាហរណ៍មួយចំនួន។

ចំណែកដំណាក់កាលទី៥បានផ្តល់នូវវិធីសាស្ត្រគណនាអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍លោការីត
 និងអាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍លោការីតមួយចំនួនដូចជា $\int \log_a(px+q)dx,$
 $\int \log_a|px+q|dx, \int \log_a^2(px+q)dx, \int \log_a^2|px+q|dx, \int \log_a(x^2+b^2)dx$
 និង $\int \log_a(x^2-b^2)dx$ ដោយបង្កើតជារូបមន្តដើម្បីយកមកប្រើប្រាស់ជាលក្ខណៈទូទៅនិង
 បានអនុវត្តន៍លើឧទាហរណ៍មួយចំនួន។

ចំពោះជំពូកទី៦បានផ្តល់នូវវិធីសាស្ត្រគណនាអាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍អិចស្ប៉ូ
 ណង់ស្វ័យគុណដែលមានទម្រង់ពិសេសមួយចំនួនដូចជា $\int xe^{\alpha x} dx,$
 $\int xa^{\alpha x} dx, \int x^2 e^{\alpha x} dx, \int x^2 a^{\alpha x} dx, \int x^n e^{\alpha x} dx, \int x^{-1} e^{\alpha x} dx, \int xe^{\alpha x^2} dx,$
 $\int xa^{\alpha x^2} dx, \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{\alpha x^2} dx, \int_0^{+\infty} xe^{\alpha x^2} dx, \int_{-\infty}^{+\infty} x^{-2} e^{-\alpha x^2} dx, \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-a(x-b)^2} dx,$
 $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-ax^2+bx} dx, \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx, \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2-bx} dx$ និង $\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-ax^2+bx} dx$
 ដោយបង្កើតជារូបមន្តដើម្បីយកមកប្រើប្រាស់ជាលក្ខណៈទូទៅនិងបានអនុវត្តន៍លើឧទាហរណ៍
 មួយចំនួន។

ចំពោះជំពូកទី៧វិញបានផ្តល់នូវវិធីសាស្ត្រគណនាអាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍លោការីត
 និងអនុគមន៍ស្វ័យគុណដែលមានទម្រង់ពិសេសមួយចំនួនដូចជា $\int x^m \ln x dx,$

$\int \frac{(\ln(ax))^n}{x} dx$, $\int \frac{\ln(ax)^n}{x} dx$, $\int \frac{\ln(ax)}{x^m} dx$, $\int \frac{dx}{x[\ln(ax)]^n}$, $\int \frac{dx}{x^m \ln x}$,
 $\int x^m (\ln x)^n dx$ និង $\int \frac{x^m}{(\ln x)^n} dx$ ដោយបង្កើតជាប្រមូលដើម្បីយកមកប្រើប្រាស់ជា
 លក្ខណៈទូទៅនិងបានអនុវត្តន៍លើឧទាហរណ៍មួយចំនួន។

ចំពោះជំពូកទី៨បានផ្តល់នូវនិយមន័យនិងលក្ខណៈនៃអនុគមន៍អ៊ីពែបូលីកហើយនិង
 វិធីសាស្ត្រគណនាអាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍អ៊ីពែបូលីកដែលមានទម្រង់ពិសេសមួយចំនួន

ដូចជា $\int \sinh(ax) dx$, $\int \cosh(ax) dx$, $\int \sinh^2(ax) dx$, $\int \cosh^2(ax) dx$,
 $\int \tanh(ax) dx$, $\int \coth(ax) dx$, $\int \operatorname{sech}(ax) dx$, $\int \operatorname{cosech}(ax) dx$, $\int \frac{dx}{\cosh^2(ax)}$
 និង $\int \frac{dx}{\sinh^2(ax)}$ ដោយបង្កើតជាប្រមូលដើម្បីយកមកប្រើប្រាស់ជាលក្ខណៈទូទៅនិងបាន
 អនុវត្តន៍លើឧទាហរណ៍មួយចំនួន។

ជាទីបញ្ចប់នេះ យើងខ្ញុំយល់ឃើញថាការសិក្សាស្រាវជ្រាវទៅលើប្រធានបទអំពី
 << សិក្សាប្រភេទអាំងតេក្រាលមួយចំនួនក្នុងវិស័យគណិតវិទ្យានិងវិទ្យាសាស្ត្រ >> បានផ្តល់នូវ
 ផលប្រយោជន៍ជាច្រើនទាំងខាងទ្រឹស្តីនិងការអនុវត្តគណនា។ ជាងនេះទៅទៀត យើងខ្ញុំ
 បានទទួលនូវគំនិតថ្មីនិងចំណេះដឹងថ្មីដែលកើតចេញពីប្រធានបទនៃអត្ថបទស្រាវជ្រាវនេះ
 និងយើងខ្ញុំសង្ឃឹមថា សៀវភៅស្រាវជ្រាវនេះជាឯកសារដ៏សំខាន់មួយសម្រាប់ជួយដល់សិស្ស
 និស្សិត លោកគ្រូ និង អ្នកគ្រូដែលមានបញ្ហាខ្លះៗទាក់ទងនឹងការគណនាអាំងតេក្រាលទាំង
 កម្រិតមធ្យមសិក្សានិងឧត្តមសិក្សា។

ឯកសារយោង

១. យឹម អាយុវឌ្ឍនៈវិជ្ជា “ អាំងតេក្រាលមិនកំណត់ ” ភ្នំពេញ ឆ្នាំ១៩៩៧។
២. យឹម អាយុវឌ្ឍនៈវិជ្ជា “ អាំងតេក្រាលកំណត់ ” ភ្នំពេញ ឆ្នាំ១៩៩៩។
៣. សួន ស៊ុវ៉ាន់ “ វិភាគចំនួនពិត ភាគ១ ” ដេប៉ាតឺម៉ង់គណិតវិទ្យានៃសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ ភ្នំពេញ ឆ្នាំ២០០៧។
៤. ក្រុមអ្នកនិពន្ធ “ គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២ ” បោះពុម្ពផ្សាយដោយគ្រឹះស្ថានបោះពុម្ពនិងចែកផ្សាយនៃក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា ភ្នំពេញ ឆ្នាំ២០១០។
៥. http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_integrals_of_hyperbolic_functions
៦. <http://archives.math.utk.edu/visual.calculus/4/improper.2/>
៧. Herbert Bristol Dwight, *Tables of Integrals and Other Mathematical Data*, New York, Macmillan Company, Third Edition, 1957.
៨. Karl Smith, *Student Mathematics Handbook and Integral Table for Calculus*, United States of America, Prentice-Hall, Inc., Third Edition, 2002.

