រាជបណ្ឌិត្យសភាកម្ពុជា

ទំនាក់ទំនងរវាង
ពីជគណិតនិងតូប៉ូវិទ្យាទូទៅ

(Relations Between Algebra and General Topology)

យឹម អាយុវឌ្ឍនៈវិជ្ជា

ផ្នែកគណិតវិទ្យានិងស្ថិតិ
វិទ្យាស្ថាន វិទ្យាសាស្ត្រនិងបច្ចេកវិទ្យា
រាជបណ្ឌិត្យសភាកម្ពុជា

ឧសភា ២០១៨

រាជបណ្ឌិត្យសភាកម្ពុជា

ទំនាក់ទំនងរវាង
ពីជគណិតនិងតូប៉ូវិទ្យាទូទៅ

(Relations Between Algebra and General Topology)

យឹម អាយុវឌ្ឍនៈវិជ្ជា

ផ្នែកគណិតវិទ្យានិងស្ថិតិ
វិទ្យាស្ថាន វិទ្យាសាស្ត្រនិងបច្ចេកវិទ្យា
រាជបណ្ឌិត្យសភាកម្ពុជា

ឧសភា ២០១៨

ចំណាប់អារម្មណ៍
របស់ឯកឧត្តមបណ្ឌិត អ៊ាប បុណ្ណា

ខ្ញុំមានសេចក្តីសោមនស្សរីករាយដោយបានឃើញនូវខ្លឹមសារនៃសៀវភៅស្តីពី « **ទំនាក់ទំនងរវាងពីជគណិតនិងតូប៉ូវិទ្យាទូទៅ** » របស់លោក **យឹម អាយុវឌ្ឍនៈវិជ្ជា** ដែលជាអ្នកវិទ្យាសាស្ត្រផ្នែកគណិតវិទ្យានិងស្ថិតិនៃវិទ្យាស្ថានវិទ្យាសាស្ត្រនិងបច្ចេកវិទ្យា។

សៀវភៅនេះ ជាស្នាដៃថ្មីមួយដែលមានប្រយោជន៍សម្រាប់សិស្ស និស្សិតនិងអ្នកស្រាវជ្រាវក្នុងវិស័យគណិតវិទ្យានិងវិទ្យាសាស្ត្រ។ ខ្លឹមសារនៃសៀវភៅនេះបានបង្ហាញជូនលោកអ្នកអាននិងអ្នកស្រាវជ្រាវនូវទ្រឹស្តីគណិតវិទ្យាមូលដ្ឋានដូចជាទ្រឹស្តីក្នុងពីជគណិត តូប៉ូវិទ្យាទូទៅនិងទំនាក់ទំនងរបស់វា។ ជាងនេះទៅទៀត ខ្ញុំសង្ឃឹមថាលោក **យឹម អាយុវឌ្ឍនៈវិជ្ជា** ប្រាកដជាខិតខំស្រាវជ្រាវបន្តទៅទៀត ដើម្បីចែករំលែកបទពិសោធន៍និងចំណេះដឹងដល់យើងទាំងអស់គ្នា និង អ្នកស្រាវជ្រាវជំនាន់ក្រោយបន្ថែមទៀត។

ជាមួយនឹងវិភាគទានដ៏ថ្លៃថ្លាក្នុងវិស័យគណិតវិទ្យារបស់លោក **យឹម អាយុវឌ្ឍនៈវិជ្ជា** ការសិក្សាស្រាវជ្រាវនេះបានផ្តល់ចំណេះដឹងខាងទ្រឹស្តីនិងគណនា ក្នុងការអភិវឌ្ឍវិស័យវិទ្យាសាស្ត្រថែមទៀត។

ថ្ងៃចន្ទ ០៧កើត ខែជេស្ឋ ឆ្នាំច សំរឹទ្ធិស័ក ព.ស. ២៥៦២
រាជធានីភ្នំពេញ, ថ្ងៃទី២១ ខែឧសភា ឆ្នាំ២០១៨
ប្រធានវិទ្យាស្ថានវិទ្យាសាស្ត្រនិងបច្ចេកវិទ្យា

បណ្ឌិត អ៊ាប បុណ្ណា

មាតិកា

ទំព័រ

ជំពូកទី១
ទ្រឹស្តីសំណុំ

ជំពូកទី២
ទំនាក់ទំនង

ជំពូកទី៣

អនុគមន៍ និង អនុវត្តន៍

ជំពូកទី៤

កាឌីណាល់ និង លំដាប់

ជំពូកទី៥
តូប៉ូវិទ្យាក្នុង $\mathbb{R}$

ជំពូកទី៦
តូប៉ូវិទ្យាក្នុង $\mathbb{R}^2$

ជំពូកទី៧
លំហតូប៉ូ និង លំហមេទ្រិក

ឧទ្ទិសស្នាដៃ

ខ្ញុំសូមឧទ្ទិសជូនចំពោះបណ្ឌិត សាស្ត្រាចារ្យ អ្នកប្រាជ្ញគ្រប់ជំនាន់ គ្រប់ជំនាញទាំងអស់ក្នុងប្រទេសនិងក្រៅប្រទេសមានផ្នែកគណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា គីមីវិទ្យា ជីវវិទ្យា កុំព្យូទ័រ វិស្វកម្ម និងសេដ្ឋកិច្ចជាដើម។ ជាពិសេសអ្នកជំនាញផ្នែកគណិតវិទ្យាទាំងអស់បានធ្វើមរណៈកាលតាំងពីយូរលង់ក្តីនិងទើបទទួលមរណៈថ្មីនេះក្តី។

ខ្ញុំសូមឧទ្ទិសស្នាដៃនេះជូនដល់ឯកឧត្តមបណ្ឌិតសភាចារ្យ **ចាន់ ពន** អតីតប្រធានវិទ្យាស្ថានវិទ្យាសាស្ត្រនិងបច្ចេកវិទ្យា ដែលបានទទួលមរណភាពទៅដោយការសោកស្តាយ សូមឱ្យវិញ្ញាណក្ខន្ធលោកជួបតែសុគតិភពរហូតតទៅ។

ខ្ញុំសូមឧទ្ទិសស្នាដៃនិក្ខេបបទនេះជូនចំពោះបុព្វការីជនរួមមាន៖

- អ្នកម្តាយបង្កើត **យ៉ែម ម៉ាលីស**
- លោកយាយ **ទ៉េត តែម**
- អ្នកម្តាយក្មេក **កៅ យុទ្ធ ថា** ។

សូមព្រះវិញ្ញាណក្ខ័ន្ធនិងវិញ្ញាណក្ខ័ន្ធ បុព្វការីជនទាំងអស់យាងនិងអញ្ជើញទៅសោយសុខនិងសុគតិភពដោយស្ងប់សុខផងចុះ។

សេចក្តីថ្លែងអំណរគុណ

ខ្ញុំសូមថ្លែងអំណរគុណយ៉ាងជ្រាលជ្រៅចំពោះឯកឧត្តមបណ្ឌិត **អ៊ុច បុណ្ណា** ប្រធានវិទ្យាស្ថានវិទ្យាសាស្ត្រនិងបច្ចេកវិទ្យា និង បណ្ឌិត **ហាក់ ធីរោ** អនុប្រធានវិទ្យាស្ថានវិទ្យាសាស្ត្រនិងបច្ចេកវិទ្យា ដែលបានជួយត្រួតពិនិត្យ កែសម្រួលនិងអនុម័តស្នាដៃនេះឱ្យបានចេញជារូបរាងឡើង។

ខ្ញុំសូមថ្លែងអំណរគុណជាពន្លឹកចំពោះឯកឧត្តមបណ្ឌិតសភាចារ្យ **សុខ ទូច** ប្រធានរាជបណ្ឌិត្យសភាកម្ពុជា ឯកឧត្តមបណ្ឌិតសភាចារ្យ **ស៊ុំ ឈុំប៊ុន** អនុប្រធានរាជបណ្ឌិត្យសភាកម្ពុជា ឯកឧត្តមបណ្ឌិតសភាចារ្យ **ច័ន្ទ សំណព្វ** អនុប្រធានរាជបណ្ឌិត្យសភាកម្ពុជា ឯកឧត្តមបណ្ឌិត **យង់ ពៅ** អគ្គលេខាធិការនៃរាជបណ្ឌិត្យសភាកម្ពុជា និង សហការីទាំងអស់ដែលបានជួយរៀបចំកិច្ចការរដ្ឋបាលនិងហិរញ្ញវត្ថុសម្រាប់ស្នាដៃនេះ។

សូមថ្លែងអំណរគុណយ៉ាងជ្រាលជ្រៅចំពោះភរិយា **យ៉ាន់ វិតារតន៍** ដែលបានជួយទំនុកបម្រុង លើកទឹកចិត្តនិងផ្តល់កម្លាំងចិត្ត និងទុកលទ្ធភាពដល់រូបខ្ញុំបាទបានរៀបរៀងសៀវភៅនេះប្រកបដោយជោគជ័យ។

សូមថ្លែងអំណរគុណចំពោះសាស្ត្រាចារ្យ បណ្ឌិតនិងទស្សនវិទូគណិតវិទ្យាទាំងឡាយដែលបានខិតខំស្រាវជ្រាវទ្រឹស្តីឬរូបមន្តគណិតវិទ្យា ហើយបានចងក្រងជាសៀវភៅយ៉ាងច្រើន ទុកឯកសារស្រាវជ្រាវដល់កូនចៅជំនាន់ក្រោយ។

រាជបណ្ឌិត្យសភាកម្ពុជា ថ្ងៃទី២១ ខែឧសភា ឆ្នាំ២០១៨

អ្នកសិក្សារៀបរៀង

យឹម អាយុវឌ្ឍនៈវិជ្ជា

តំណាងផ្នែកគណិតវិទ្យានិងស្ថិតិ

អារម្ភកថា

ការរីកចម្រើននៃបច្ចេកវិទ្យាតម្រូវឱ្យមនុស្សខិតខំស្វែងរកនូវចំណេះដឹងថ្មីៗ ដើម្បីគ្រប់គ្រងនិងប្រើប្រាស់នូវបច្ចេកវិទ្យាទាំងអស់នោះ។ ក្នុងនោះដែរ មុខជំនាញគណិតវិទ្យាដើរតួនាទីយ៉ាងសំខាន់នៅក្នុងវិស័យផ្សេងៗ ជាពិសេសវិស័យវិទ្យាសាស្ត្រនិងវាជាចំណែកមួយដែលមិនអាចខ្វះបានក្នុងការចូលរួមអភិវឌ្ឍន៍បច្ចេកវិទ្យានិងភាពរីកចម្រើននៃប្រទេសជាតិ។ ដោយកត្តានេះហើយទើបធ្វើឱ្យខ្ញុំបាទចូលចិត្តសិក្សាស្រាវជ្រាវគណិតវិទ្យាខាងទ្រឹស្តី ហើយបានរៀបចំសៀវភៅស្តីអំពី « **ទំនាក់ទំនងរវាងពីជគណិតនិងតូប៉ូវិទ្យាទូទៅ** » នេះឡើងក្នុងគោលបំណងចូលរួមចំណែកអភិវឌ្ឍន៍បំណិន និង ការពិចារណារបស់និស្សិតក៏ដូចជាមិត្តអ្នកអានទាំងអស់ដែរ។

សៀវភៅនេះរៀបចំឡើងដើម្បីបំពេញនូវសំណូមពររបស់និស្សិត អ្នកស្រាវជ្រាវ និង មិត្តអ្នកអានទាំងអស់ដែលខ្វះឯកសារសិក្សានិងស្រាវជ្រាវ ជាពិសេសអ្នកដែលបានរៀនឯកទេសគណិតវិទ្យា ត្រូវតែសិក្សាពីមុខវិជ្ជានេះ ដើម្បីយល់ដឹងនូវលក្ខណៈមូលដ្ឋាននៃទ្រឹស្តីដូចជា **ទ្រឹស្តីសំណុំ កាឌីណាល់ ទំនាក់ទំនង អនុគមន៍ អនុវត្តន៍ លំដាប់ តូប៉ូវិទ្យានៃបន្ទាត់ តូប៉ូវិទ្យានៃប្លង់ លំហតូប៉ូ លំហរង លំហអូមេអូម៉ូភិក** និង **លំហមេទ្រិក**។

ខ្ញុំសូមស្វាគមន៍ជានិច្ចរាល់ការរិះគន់ស្ថាបនា ដើម្បីឱ្យសៀវភៅនេះកាន់តែសុក្រិត្យថែមទៀត ហើយខ្ញុំសង្ឃឹមនិងជឿជាក់ថា អ្នកសិក្សាស្រាវជ្រាវគណិតវិទ្យាពិតជាទទួលបាននូវផលប្រយោជន៍និងជោគជ័យក្នុងកិច្ចការសិក្សាជាមិនខានពីសៀវភៅនេះ។

សេចក្តីផ្តើម

ពីជគណិត ជាមូលដ្ឋានគ្រឹះនៃវិស័យគណិតវិទ្យា ពីព្រោះមនុស្សបានប្រើប្រាស់លេខ ចំនួននិងនព្វន្តមុនគេក្នុងគណិតវិទ្យា។ ម្យ៉ាងទៀត មុខវិជ្ជាទាំងអស់ក្នុងវិស័យគណិតវិទ្យាដូចជា គណិតវិទ្យាវិភាគ ប្រូបាប៊ីលីតេ តូប៉ូវិទ្យា សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល វិភាគកុំផ្លិច ។ល។ ទាក់ទងនឹងលេខ ចំនួន ប្រមាណវិធី សមីការ វិសមីការ សមភាព វិសមភាព និង វិធីសាស្ត្រនៃពីជគណិត។ ហេតុនេះ យើងនឹងលើកយកប្រធានបទមួយស្តីអំពី <<**ទំនាក់ទំនងរវាងពីជគណិតនិងតូប៉ូវិទ្យាទូទៅ**>> មកសិក្សានិងស្រាវជ្រាវ។ តើមានទំនាក់ទំនងអ្វីខ្លះរវាងពីជគណិតនិងតូប៉ូវិទ្យាទូទៅ? ដើម្បីឆ្លើយតបនឹងសំណួរនេះ យើងនឹងបង្ហាញនៅក្នុងជំពូកទី១ ជំពូកទី២ និង ជំពូកបន្តបន្ទាប់។ ជាដំបូង យើងនឹងសិក្សាទ្រឹស្តីដែលទាក់ទងនឹងពីជគណិតក្នុងជំពូកទី១មុនសិនស្តីអំពីទ្រឹស្តីសំណុំ។

ជំពូកទី១

ទ្រឹស្តីសំណុំ

(Set Theory)

១.១ សំណុំ និង ធាតុ

និយមន័យទី១ សំណុំ ជាបណ្តុំនៃធាតុ។ ធាតុអាចជាវត្ថុ មនុស្ស ឬ សត្វ។[១]
គេកំណត់យកអក្សរធំ A, B, C,... តាងឱ្យសំណុំ និង អក្សរតូច a , b , c , … ឬ ចំនួនតាងឱ្យធាតុនៃសំណុំ។

- បកាសន៍ b ជាធាតុរបស់សំណុំ A កំណត់សរសេរដោយ $b \in A$ ។

- បកាសន៍មិន b ជាធាតុរបស់សំណុំ A កំណត់សរសេរដោយ $b \notin A$ ។

គេមានពីររបៀបដើម្បីកំណត់សំណុំនីមួយៗ៖

- ចំពោះសំណុំទាំងឡាយដែលអាចសរសេរពង្រាយធាតុទាំងអស់បាន។

សម្គាល់ នៅក្នុងសៀវភៅគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១០របស់ក្រសួងអប់រំ យុវជននិងកីឡា មានប្រើពាក្យ **សំណើ** តែសទ្ធានុក្រមវិទ្យាសាស្ត្រ និង បច្ចេកវិទ្យានៃក្រុមប្រឹក្សាជាតិភាសាខ្មែរ បានអនុម័តពាក្យ សំណើ នេះជា **បកាសន៍** វិញ។

ឧទាហរណ៍ទី១ $A = \{a, b, c, d\}$ តាងឱ្យសំណុំ A នៃធាតុ a , b , c , d ។

---

[១] http://alas.matf.bg.ac.rs/~mi10164/Materijali/DS.pdf, p. 1

- ចំពោះសំណុំទាំងឡាយដែលធាតុមានលក្ខណៈសម្គាល់តាមលក្ខខណ្ឌពិតប្រាកដណាមួយ។

ឧទាហរណ៍ទី២ $B=\{x : x\in\mathbb{Z} , x>7\}$ តាងឱ្យសំណុំ B នៃធាតុ x ដែល x ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប និង $x>7$ ។

១.២ សំណុំសាកល និង សំណុំទទេ

និយមន័យទី២ សំណុំសាកល ជាសំណុំនៃធាតុទាំងអស់ ដែលគេយកមកសិក្សា។ គេកំណត់សរសេរវាដោយ U ។

ឧទាហរណ៍ទី៣ ក្នុងលំហវិមាត្របី សំណុំសាកល U ជាសំណុំនៃគ្រប់ចំណុចទាំងអស់នៃលំហ។

និយមន័យទី៣ សំណុំទទេ ជាសំណុំដែលគ្មានធាតុ។ គេកំណត់សរសេរវាដោយ $\varnothing$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៤ សំណុំ $C=\{x: x\in\mathbb{Z} , x^2=5\}$ ជាសំណុំទទេ។

១.៣ សំណុំរង

និយមន័យទី៤ គេថា A ជាសំណុំរងនៃសំណុំ B គេកំណត់សរសេរ $A\subseteq B$ បើគ្រប់ធាតុ x នៃ A ជាធាតុនៃ B ។[២] គេថា A ជាសំណុំរងផ្ទាល់នៃសំណុំ B គេកំណត់សរសេរ $A\subset B$ បើ A ជាសំណុំរងនៃ B និងវាមិនស្មើនឹង B ទេ។

ឧទាហរណ៍ទី៥ គេឱ្យសំណុំសាកល $U=\{1 , 2 , 3 , ... ,10\}$ និង សំណុំ $A=\{1 , 2 , 3\}$, $B=\{1 , 2 , 3 , 4 , 5\}$ និង $C=\{1 , 2 , 3 , 4 , 5\}$ ។ យើងបាន A ជាសំណុំរងនៃ B តែ B មិនមែនជាសំណុំរងផ្ទាល់នៃ C ទេ។

---

[២] http://alas.matf.bg.ac.rs/~mi10164/Materijali/DS.pdf, op. cit., p. 2

ទ្រឹស្តីបទទី១ [៣]

ក. ចំពោះគ្រប់សំណុំ A គេបាន $\emptyset \subseteq A \subseteq A \subseteq U$ ។

ខ. បើ $A \subseteq B$ និង $B \subseteq C$ នោះគេបាន $A \subseteq C$ ។

យើងនឹងស្រាយបញ្ជាក់នូវសំណួរ ក. ដូចតទៅ៖

ចំពោះគ្រប់សំណុំ A យើងមាន $\forall x : x \in \emptyset \to x \in A$ ពិត

(ពីព្រោះ $\forall x : x \in \emptyset$ ជាបកាសន៍មិនពិត)។ តាមនិយមន័យ នាំឱ្យ $\emptyset \subseteq A$ ។

យើងមាន $\forall y : y \in A \to y \in A$ ។ តាមនិយមន័យ នាំឱ្យ $A \subseteq A$ ។

ដោយ U ជាសំណុំសាកល យើងបាន $\forall t : t \in A \to t \in U$ ។

តាមនិយមន័យ នាំឱ្យ $A \subseteq U$ ។

ដូចនេះ ចំពោះគ្រប់សំណុំ A យើងបាន $\emptyset \subseteq A \subseteq A \subseteq U$ ។

ចំណែកឯសំណួរ ខ. ទុកដូចជាលំហាត់។

នៅក្នុងសៀវភៅគណិតវិទ្យា គេនិយមប្រើនិមិត្តសញ្ញាពិសេសមានដូចខាងក្រោម៖

១. $\mathbb{N} =$ សំណុំនៃចំនួនគត់ធម្មជាតិឬសំណុំនៃចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបវិជ្ជមាន៖ $1, 2, 3, \ldots$ ។

២. $\mathbb{Z} =$ សំណុំនៃចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប៖ $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ ។

៣. $\mathbb{Q} =$ សំណុំនៃចំនួនសនិទាន។

៤. $\mathbb{R} =$ សំណុំនៃចំនួនពិត។

៥. $\mathbb{C} =$ សំណុំនៃចំនួនកុំផ្លិច។

យើងឃើញថា $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ ។

១.៤ សមភាព និង ដ្យាក្រាមវិន

និយមន័យទី៥ គេថាសំណុំ A និង B ជាពីរសំណុំស្មើគ្នា កំណត់សរសេរ

[៣] http://alas.matf.bg.ac.rs/~mi10164/Materijali/DS.pdf, op. cit., p. 2 and 3

$A = B$ លុះត្រា តែគ្រប់ធាតុនៃសំណុំ A ជាធាតុនៃសំណុំ B និងផ្ទុយមកវិញ។
គេបាន $A = B \Leftrightarrow (\forall x : x \in A \Leftrightarrow x \in B)$ ឬ
$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៦ គេឱ្យសំណុំ $A = \{1 , 2 , 3 , \dots ,10\}$ និង
$B = \{x \in \mathbb{N} : 0 < x < 11\}$ ។ តើសំណុំ B ស្មើនឹង A ឬទេ?

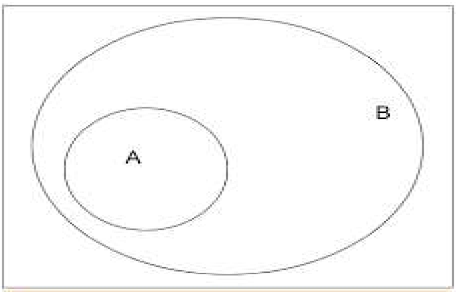
យើងបាន $B = \{x \in \mathbb{N} : 0 < x < 11\} = \{1 , 2 , 3 , \dots ,10\} = A$ ។

និយមន័យទី៦ ដ្យាក្រាមវិន ជារូបភាពតាងឱ្យសំណុំ ដោយសំណុំចំណុចក្នុងប្លង់។ គេតាងសំណុំសាកល U ដោយផ្ទៃកក្នុងនៃចតុកោណកែង ហើយសំណុំរងរបស់វាដោយថាសដែលនៅខាងក្នុងចតុកោណកែងនោះ។[៤]

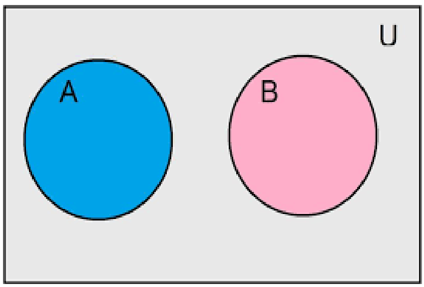
ឧទាហរណ៍ទី៧ សង់ដ្យាក្រាមវិនក្នុងករណី៖

ក. $A \subseteq B$ ខ. A និង B ជាសំណុំដាច់គ្នា គ. A និង B ជាសំណុំដែលមានធាតុរួម។

យើងខ្ញុំសង់ដ្យាក្រាមវិនក្នុងករណី ក. និង ខ. ប៉ុណ្ណោះ តែសំណួរ គ. វិញទុកឱ្យអ្នកអាន និង អ្នកសិក្សាសង់វា។



រូបទី១៖ $A \subseteq B$

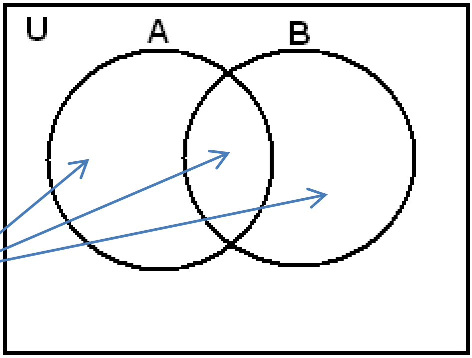


រូបទី២៖ A និង B ជាសំណុំដាច់គ្នា

[៤] http://alas.matf.bg.ac.rs/~mi10164/Materijali/DS.pdf, op. cit., p. 3

១.៥ ប្រមាណវិធីលើសំណុំ

និយមន័យទី៧ (**ប្រមាណវិធីប្រជុំ**) ប្រជុំនៃពីរសំណុំ A និង B កំណត់សរសេរដោយ $A \cup B$ គឺជាសំណុំនៃធាតុ x ទាំងឡាយដែល x ជាធាតុរបស់ A ឬ x ជាធាតុរបស់ B ។ យើងបាន $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$ ។[៥]



រូបទី៣៖ $A \cup B$

ឧទាហរណ៍ទី៨ គេឱ្យសំណុំ $A = \{x \in \mathbb{N} : 0 < x < 9\}$ និង $B = \{x \in \mathbb{N} : 6 < x < 12\}$ ។ គណនាសំណុំ $A \cup B$ ។

យើងបាន $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ និង $B = \{7, 8, 9, 10, 11\}$ ។

នាំឱ្យ $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \cup \{7, 8, 9, 10, 11\}$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ ។

លក្ខណៈនៃប្រមាណវិធីប្រជុំ

ក. $A \cup A = A$ ខ. $A \cup B = B \cup A$

គ. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ ឃ. $A \subseteq A \cup B$, $B \subseteq A \cup B$

ង. $A \cup \varnothing = A$ ។

យើងនឹងស្រាយបញ្ជាក់នូវលក្ខណៈ ក. ដូចតទៅ៖

---

[៥] http://alas.matf.bg.ac.rs/~mi10164/Materijali/DS.pdf, op. cit., p. 4

យើងមាន $\forall x: x\in A\cup A \overset{\text{def}}{\leftrightarrow} x\in A \vee x\in A$

$\overset{\text{logic}}{\leftrightarrow} x\in A$ ។

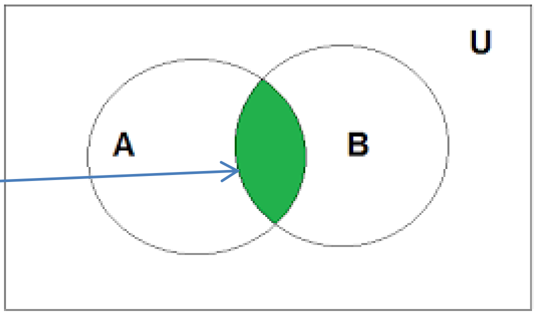
ដូចនេះ យើងបាន $A\cup A = A$ ។

ចំណែកឯលក្ខណៈ ខ. គ. ឃ. និង ង. ទុកដូចជាលំហាត់។

និយមន័យទី៨ (ប្រមាណវិធីប្រសព្វ) ប្រសព្វនៃពីរសំណុំ A និង B កំណត់សរសេរដោយ $A\cap B$ គឺជាសំណុំនៃធាតុ x ទាំងឡាយដែល x ជាធាតុរបស់ A និង x ជាធាតុរបស់ B ។

យើងបាន $A\cap B = \{x : x\in A \wedge x\in B\}$ ។[៦]

រូបទី៤៖ $A\cap B$



ឧទាហរណ៍ទី៩ គេឱ្យសំណុំ $A=\{x\in\mathbb{N} : 0<x<9\}$ និង $B=\{x\in\mathbb{N} : 6<x<12\}$ ។ គណនាសំណុំ $A\cap B$ ។

យើងបាន $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ និង $B=\{7, 8, 9, 10, 11\}$ ។

នាំឱ្យ $A\cap B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}\cap\{7, 8, 9, 10, 11\}=\{7, 8\}$ ។

លក្ខណៈនៃប្រមាណវិធីប្រសព្វ

ក. $A\cap A = A$ ខ. $A\cap B = B\cap A$

---

៦ http://plouffe.fr/simon/math/Finite%20maths.pdf, p. 37

គ. $(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$ ឃ. $A\cap B\subseteq A$, $A\cap B\subseteq B$

ង. $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ ច. $A\cap\varnothing=\varnothing$

ឆ. $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ ។

យើងនឹងស្រាយបញ្ជាក់នូវលក្ខណៈ ខ. ដូចតទៅ៖

យើងមាន $\forall t : t\in A\cap B \overset{\text{def}}{\leftrightarrow} t\in A\wedge t\in B$

$$\overset{\text{logic}}{\leftrightarrow} t\in B\wedge t\in A$$

$$\overset{\text{def}}{\leftrightarrow} t\in B\cap A$$ ។

ដូចនេះ យើងបាន $A\cap B=B\cap A$ ។

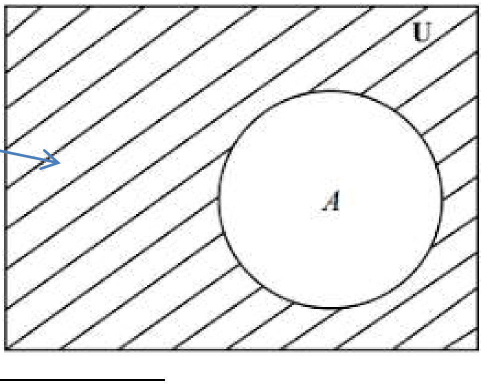
ចំណែកឯលក្ខណៈ ក. គ. ឃ. ង. ច. និង ឆ. ទុកដូចជាលំហាត់។

បើ $A\cap B=\varnothing$ មានន័យថា សំណុំ A និង B គ្មានធាតុរួមទេ គេថា A និង B ជាសំណុំដាច់គ្នា។

និយមន័យទី៩ (**សំណុំរងបំពេញ**) សំណុំរងបំពេញនៃសំណុំ A ក្នុងសំណុំសាកល U កំណត់សរសេរដោយ C_U^A ឬក៏ A^c គឺជាសំណុំនៃធាតុ x ទាំងឡាយរបស់ U ដែលមិនមែនជាធាតុរបស់ A ។

យើងបាន $A^c=\{x : x\in U , x\notin A\}$ ។[៧]

រូបទី៥៖ A^c



[៧] http://plouffe.fr/simon/math/Finite%20maths.pdf, op. cit., p. 37

ឧទាហរណ៍ទី១០ គេឱ្យសំណុំ $B=\{x\in\mathbb{N}: 0<x<15\}$ ក្នុងសំណុំសាកល $U=\{x\in\mathbb{N}: x<21\}$ ។ គណនាសំណុំ B^c ។

យើងបាន $B=\{1, 2, 3, \dots, 14\}$ និង $U=\{1, 2, 3, \dots, 20\}$ ។

នាំឱ្យ $B^c=\{x: x\in U , x\notin B\}=\{15, 16, 17, 18, 19, 20\}$ ។

លក្ខណៈនៃសំណុំរងបំពេញ

ក. $A\cap A^c=\varnothing$ ខ. $A\cup A^c=U$

គ. $U^c=\varnothing$ ឃ. $\varnothing^c=U$

ង. $(A^c)^c=A$ ច. $A\subseteq B\Leftrightarrow B^c\subseteq A^c$

ឆ. $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$ ជ. $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$ ។

យើងស្រាយបញ្ជាក់នូវលក្ខណៈ ក. ដូចខាងក្រោម៖

យើងមាន $\forall y: y\in A\cap A^c \overset{\text{def}}{\leftrightarrow} y\in A\wedge y\in A^c$

$\overset{\text{def}}{\leftrightarrow} y\in A\wedge y\notin A$

$\overset{\text{logic}}{\leftrightarrow} y\in A\wedge\neg(y\in A)$ មិនពិត។

ដូចនេះ យើងបាន $A\cap A^c=\varnothing$ ។

បន្ទាប់មក យើងស្រាយបញ្ជាក់នូវលក្ខណៈ ង.។

ចំពោះគ្រប់ $m\in (A^c)^c \overset{\text{def}}{\leftrightarrow} m\notin A^c \overset{\text{logic}}{\leftrightarrow} \neg(m\in A^c)$

$\overset{\text{def}}{\leftrightarrow} \neg(m\notin A) \overset{\text{logic}}{\leftrightarrow} \neg(\neg(m\in A)) \overset{\text{logic}}{\leftrightarrow} m\in A$ ។

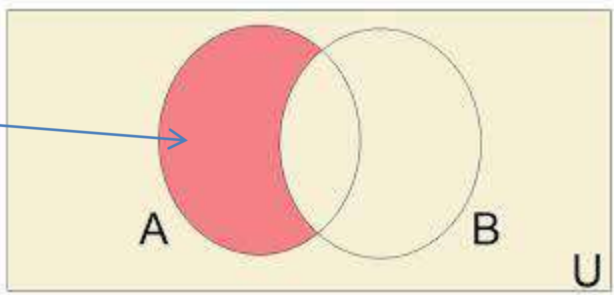
ដូចនេះ យើងបាន $(A^c)^c=A$ ។

ចំណែកឯលក្ខណៈ ខ. គ. ឃ. ច. ឆ. និង ជ. ទុកដូចជាលំហាត់។

និយមន័យទី១០ (ផលសងរវាងពីរសំណុំ) ផលសងរវាងសំណុំ A និង B កំណត់សរសេរដោយ $A\setminus B$ គឺជាសំណុំនៃធាតុ x ទាំងឡាយដែល x ជាធាតុរបស់ A និង x មិនមែនជាធាតុរបស់ B ។

យើងបាន $A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$ ។[៨]

រូបទី៦៖ $A \setminus B$



ឧទាហរណ៍ទី១១ គេឱ្យសំណុំ $E = \{x \in \mathbb{N} : 0 < x < 11\}$ និង $F = \{x \in \mathbb{N} : 5 < x < 15\}$ ។ គណនាសំណុំ $E \setminus F$ និង $F \setminus E$ ។

យើងបាន $E = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ និង $F = \{6, 7, 8, \dots, 14\}$ ។
នាំឱ្យ $E \setminus F = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ និង $F \setminus E = \{11, 12, 13, 14\}$ ។

លក្ខណៈនៃផលសង

ក. $A \setminus B = A \cap B^c$ ខ. $(A \setminus B) \cap B = \varnothing$ ។

យើងស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត ក. ដូចខាងក្រោម ចំណែកឯរូបមន្ត ខ. ទុកដូចជាលំហាត់។

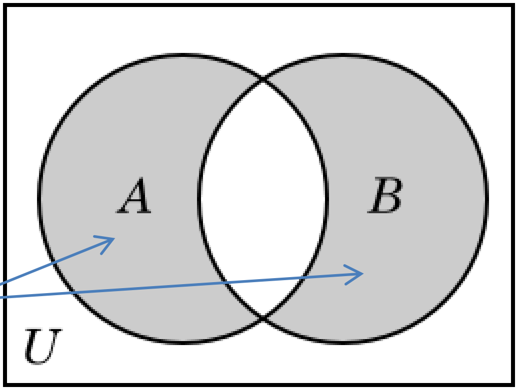
យើងបាន $A \setminus B \overset{def}{=} \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$

$$\overset{def}{=} \{x : x \in A \wedge x \in B^c\} \overset{def}{=} A \cap B^c \text{ ។}$$

និយមន័យទី១១ (ផលសងឆ្លុះរវាងពីរសំណុំ) ផលសងឆ្លុះរវាងសំណុំ A និង B កំណត់សរសេរដោយ $A \Delta B$ គឺជាសំណុំនៃធាតុ x ទាំងឡាយ ដែល x ជាធាតុរបស់ A និង x មិនមែនជាធាតុរបស់ B ឬ x ជាធាតុរបស់ B និង x មិនមែនជាធាតុរបស់ A ។

[៨] http://plouffe.fr/simon/math/Finite%20maths.pdf, op. cit., p. 37

យើងបាន $A \,\Delta\, B=\{x:(x\in A \wedge x\notin B)\vee(x\in B\wedge x\notin A)\}$ ។[៩]



រូបទី៧៖ $A \,\Delta\, B$

ឧទាហរណ៍ទី១២ គេឱ្យសំណុំ $E=\{x\in\mathbb{N}:0<x<11\}$ និង $F=\{x\in\mathbb{N}:5<x<15\}$ ។ គណនាសំណុំ $E \,\Delta\, F$ ។

យើងបាន $E=\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ និង $F=\{6, 7, 8, \ldots, 14\}$ ។

នាំឱ្យ $A \,\Delta\, B=\{x:(x\in A \wedge x\notin B)\vee(x\in B\wedge x\notin A)\}$

$=\{1, 2, 3, 4, 5, 11, 12, 13, 14\}$ ។

លក្ខណៈនៃផលសងឆ្លុះ

ក. $A \,\Delta\, B=(A \setminus B)\cup(B\setminus A)$

ខ. $A \,\Delta\, B=(A\cap B^c)\cup(B\cap A^c)$ ។

លក្ខណៈ ក. និង ខ. ទុកដូចជាលំហាត់។

១.៦ សំណុំរាប់អស់ និង គោលការណ៍ទ្រាប់

និយមន័យទី១២ សំណុំអាចរាប់អស់ឬអនន្ត។ គេថា សំណុំមួយជាសំណុំរាប់អស់ (ឬសំណុំកំណត់) កាលណាសំណុំនេះ ជាសំណុំទទេ ឬ សំណុំដែលមាន

[៩] http://alas.matf.bg.ac.rs/~mi10164/Materijali/DS.pdf, op. cit., p. 6

m ជាតុផ្សេងគ្នាដែល m ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។ បើមិនដូចនេះទេ គេថាវាជាសំណុំមិនកំណត់ (ឬសំណុំអនន្ត ឬក៏សំណុំអនន្តធាតុ)។[១០] កាឌីណាល់នៃសំណុំ A ជាចំនួនធាតុនៃសំណុំនេះ កំណត់សរសេរដោយ $n(A)$ ឬ $|A|$។

ឧទាហរណ៍ទី១៣

- សំណុំទទេ ជាសំណុំរាប់អស់ និងវាមានកាឌីណាល់ស្មើនឹង 0។
- សំណុំ $A=\{5, 6, 7, ..., 2018\}$ ជាសំណុំរាប់អស់ និង $n(A)=2014$។
- សំណុំ $\mathbb{N}$ ជាសំណុំអនន្ត និង $n(\mathbb{N})=+\infty$។

បទគន្លឹះ

បើ A និង B ជាពីរសំណុំដាច់គ្នានិងរាប់អស់ នោះគេបាន $A\cup B$ ជាសំណុំរាប់អស់ ហើយ $n(A\cup B)=n(A)+n(B)$ ។

យើងស្រាយបញ្ជាក់បទគន្លឹះនេះដូចខាងក្រោម៖

តាង $A=\{a_1 , a_2 ,..., a_m\}$ និង $B=\{b_1 , b_2 ,..., b_p\}$ ជាពីរសំណុំដាច់គ្នានិងរាប់អស់។ នាំឱ្យ $n(A)=m$, $n(B)=p$, $a_i \neq b_j$ និង

$A\cup B=\{a_1 , a_2 ,..., a_m , b_1 , b_2 ,..., b_p\}$ ជាសំណុំរាប់អស់ ហើយ

$n(A\cup B)=m+p=n(A)+n(B)$ ។

ទ្រឹស្តីបទទី២

បើ A និង B ជាពីរសំណុំរាប់អស់ នោះគេបាន $A\cup B$ និង $A\cap B$ ជាសំណុំរាប់អស់ ហើយ $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ ។[១១]

គូរ៉ូលៃ

បើ A , B និង C ជាបីសំណុំរាប់អស់ នោះគេបាន $A\cup B\cup C$ ជា

---

[១០] http://alas.matf.bg.ac.rs/~mi10164/Materijali/DS.pdf, op. cit., p. 8

[១១] Ibid., p. 9

សំណុំរាប់អស់ ហើយ

$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$ ។

ឧទាហរណ៍ទី១៤ នៅក្នុងចំណោមនិស្សិត ៧១ នាក់ គេបានរកឃើញថា មាននិស្សិត ២៨ នាក់ ចូលចិត្តរូបវិទ្យា ៤៩ នាក់ចូលចិត្តគណិតវិទ្យា និង ១៧ នាក់ចូលចិត្តទាំងពីរមុខនេះ។ រកចំនួននិស្សិតដែលមិនចូលចិត្តមុខវិជ្ជាណាមួយសោះក្នុងចំណោមមុខវិជ្ជាទាំងពីរ។

ជាដំបូង យើងតាង U ជាសំណុំនៃនិស្សិតទាំងអស់។

តាង A ជាសំណុំនៃនិស្សិតដែលចូលចិត្តរូបវិទ្យា។

តាង B ជាសំណុំនៃនិស្សិតដែលចូលចិត្តគណិតវិទ្យា។

យើងមាន $n(U)=71$ នាក់ , $n(A)=28$ នាក់ , $n(B)=49$ នាក់ និង $n(A\cap B)=17$ នាក់។

តាមទ្រឹស្តីបទទី២ នាំឱ្យចំនួននិស្សិតដែលចូលចិត្តមុខវិជ្ជាមួយយ៉ាងតិចគឺ

$$\begin{aligned} n(A\cup B) &= n(A)+n(B)-n(A\cap B) \\ &= 28+49-17=60 \text{ នាក់ ។} \end{aligned}$$

ដូចនេះ ចំនួននិស្សិតដែលមិនចូលចិត្តមុខវិជ្ជាណាមួយសោះក្នុងចំណោមមុខវិជ្ជាទាំងពីរគឺ $n(U)-n(A\cup B)=71-60=11$ នាក់។

១.៧ ថ្នាក់នៃសំណុំ និង សំណុំស្វ័យគុណ

និយមន័យទី១៣ ថ្នាក់នៃសំណុំតាងដោយ $\mathcal{A}$ ជាសំណុំដែលមានធាតុជាសំណុំ។ ចំណែក សំណុំរងនៃថ្នាក់ $\mathcal{A}$ ជាថ្នាក់រង។ [១២]

ឧទាហរណ៍ទី១៥ គេឱ្យសំណុំ $E=\{2,3,4,5\}$។

ក. កំណត់ថ្នាក់នៃសំណុំរបស់សំណុំ E ដែលមានបីធាតុ។

[១២] http://alas.matf.bg.ac.rs/~mi10164/Materijali/DS.pdf, op. cit., p. 10

ខ. កំណត់ថ្នាក់នៃសំណុំរបស់សំណុំ E ដែលមានបីធាតុនិងក្នុងនោះមានធាតុ 5 ។

យើងរកចម្លើយនូវសំណួរ ក. រីឯសំណួរ ខ. ទុកដូចជាលំហាត់។
យើងបានថ្នាក់នៃសំណុំរបស់សំណុំ E ដែលមានបីធាតុគឺ
$\mathscr{A} = \{\{2, 3, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{3, 4, 5\}\}$ ។

និយមន័យទី១៤ ថ្នាក់នៃសំណុំរងទាំងអស់នៃសំណុំ E ហៅថា សំណុំស្វ័យគុណនៃសំណុំ E និង កំណត់សរសេរដោយ $\mathscr{P}(E)$ ។ [១៣]
គេបាន $\mathscr{P}(E) = \{ A : A \subseteq E \}$ ។
បើ E ជាសំណុំរាប់អស់ នោះគេបាន $\mathscr{P}(E)$ ក៏ជាសំណុំរាប់អស់ និង $n(\mathscr{P}(E)) = 2^{n(E)}$ ។

ឧទាហរណ៍ទី១៦ រកសំណុំស្វ័យគុណនៃសំណុំខាងក្រោម៖

ក. $E = \{2, 3\}$ ខ. $F = \{2, 3, 4\}$ ។

យើងរកចម្លើយនូវសំណួរ ក. រីឯសំណួរ ខ. ទុកដូចជាលំហាត់។
ដោយសំណុំ E មាន $n(E) = 2$ ធាតុ នោះសំណុំស្វ័យគុណរបស់វាមាន $2^{n(E)} = 2^2 = 4$ ធាតុ ហើយ $\mathscr{P}(E) = \{\varnothing, \{2\}, \{3\}, E\}$ ។

១.៨ គម្រប និង បំណែករបស់សំណុំមួយ

និយមន័យទី១៥ គេឱ្យ A ជាផ្នែកមួយនៃសំណុំ E ហើយ $\mathscr{F}$ ជាថ្នាក់នៃសំណុំរងនៃ E ។ គេថា $\mathscr{F}$ ជា**គម្រប**នៃ A លុះត្រាតែ A នៅក្នុងប្រជុំនៃគ្រប់ធាតុទាំងអស់របស់ $\mathscr{F}$ ។ [១៤]

---

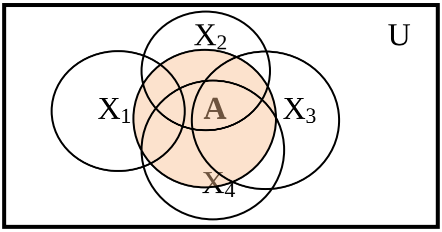
[១៣] http://exo7.emath.fr/cours/livre-algebre-1.pdf, p. 12

[១៤] គណៈកម្មាធិការជាតិអចិន្ត្រៃយ៍នៃខេមរយានកម្មសិក្សា " *គណិតវិទ្យា៖ ពីជគណិត* " ក្រសួងអប់រំជាតិ ១៩៧៣, ទំព័រ១០

ដូចនេះ $\mathscr{F}$ ជាគម្របនៃ A លុះត្រាតែ $A \subseteq \bigcup_{\mathscr{F}} X$ ។

ឧទាហរណ៍ទី១៧ ក្នុងរូបទី៨ $\mathscr{F} = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ ជាគម្របនៃ A ។

រូបទី៨



និយមន័យទី១៦ គេឱ្យ A ជាផ្នែកមួយនៃសំណុំ E ហើយ $\mathscr{F}$ ជាថ្នាក់នៃសំណុំរងមិនទទេនៃ E ។ គេថា $\mathscr{F}$ ជា**បំណែក**នៃ A លុះត្រាតែៈ

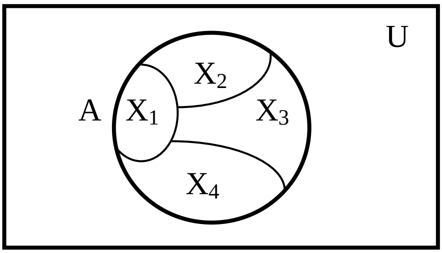
១. ធាតុរបស់ $\mathscr{F}$ ជាសំណុំដាច់គ្នាពីរៗ

២. ប្រជុំនៃគ្រប់ធាតុទាំងអស់របស់ $\mathscr{F}$ ស្មើនឹង A ។ [១៥]

វិបាក បើ $\mathscr{F}$ ជាបំណែកនៃ A នោះគេបាន $\mathscr{F}$ ជាគម្របនៃ A ។

ឧទាហរណ៍ទី១៨ ក្នុងរូបទី៩ $\mathscr{F} = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ ជាបំណែកនៃ A ។

រូបទី៩



ឧទាហរណ៍ទី១៩ គេឱ្យសំណុំ $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \subseteq U$ ហើយ
$F_1 = \{\{1, 3, 5\}, \{2, 6\}, \{4, 8, 9\}\}$, $F_2 = \{\{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6, 8\}, \{5, 7, 9\}\}$

[១៥] គណៈកម្មាធិការជាតិអចិន្ត្រៃយ៍នៃខេមរយានកម្មសិក្សា -ដ.ឯ.ម- ទំព័រ១១

និង $F_3 = \{\{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6, 8\}, \{7, 9\}\}$ ជាថ្នាក់នៃសំណុំរងមិនទទេនៃ B ។
តើ F_1, F_2, F_3 ជាបំណែកនៃ B ដែរឬទេ? ពីព្រោះអ្វី?

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖
ចំពោះសំណុំ F_1 មិនមែនជាបំណែកនៃ B ទេ ពីព្រោះ
$\{1, 3, 5\} \cup \{2, 6\} \cup \{4, 8, 9\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\} \neq B$ ។
ចំពោះសំណុំ F_2 មិនមែនជាបំណែកនៃ B ទេ ពីព្រោះ
$\{1, 3, 5\} \cap \{5, 7, 9\} = \{5\} \neq \varnothing$ ។
រីឯសំណួរចុងក្រោយ ទុកដូចជាលំហាត់។

១.៩ ផលគុណនៃសំណុំ

យើងមានគូមានលំដាប់ (a, b) ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ៖

១. បើ $a \neq b$ គេបាន $(a, b) \neq (b, a)$

២. $(a, b) = (c, d)$ សមមូល $a = c$ និង $b = d$ ។

និយមន័យទី១៧ គេឱ្យពីរសំណុំ A និង B ។ គេហៅថា ផលគុណកាតេស្យ៉ាង ឬ ផលគុណដេកាតនៃពីរសំណុំ A និង B កំណត់សរសេរដោយ $A \times B$ គឺជាសំណុំនៃគូមានលំដាប់ (a, b) ទាំងអស់ដែល $a \in A$ និង $b \in B$ ។

តាមនិយមន័យ គេបាន $A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$ ។ [១៦]

សម្គាល់ ១. ជាទូទៅ $A \times B \neq B \times A$ បើ $A \neq B$ ។

២. យើងជំនួស A^2 ដោយ $A \times A$ ។ ហេតុនេះ $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \mathbb{N}^2$, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2$ និង $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ ។

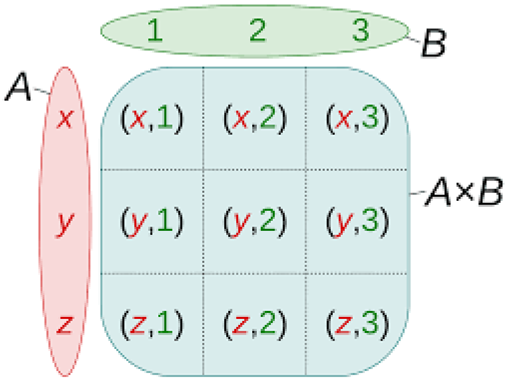
យើងក៏អាចពង្រីកផលគុណដេកាតដល់ n សំណុំផងដែរ។

---

[១៦] http://exo7.emath.fr/cours/livre-algebre-1.pdf, op. cit., p. 12

ឧទាហរណ៍ទី២០ គេឱ្យ $A=\{x, y, z\}$ និង $B=\{1, 2, 3\}$ ។ ចូរកំណត់សំណុំ $A\times B$, $B\times A$ និង $A\times A$ ។

រូបទី១០



តាមនិយមន័យ យើងបាន៖

$$A\times B=\{(x,1), (x, 2), (x, 3), (y,1), (y, 2), (y, 3), (z,1), (z, 2), (z, 3)\}$$

$$B\times A=\{(1,x), (2, x), (3, x), (1,y), (2, y), (3, y), (1,z), (2, z), (3, z)\}$$

និង

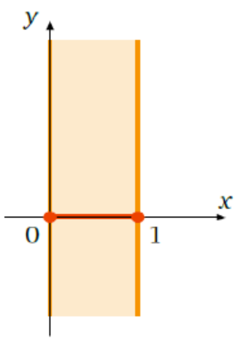
$$A\times A=\{(x,x), (x, y), (x, z), (y,x), (y, y), (y, z), (z,x), (z, y), (z, z)\}$$ ។

ឧទាហរណ៍ទី២១ ចូរសង់សំណុំ $[0\ ,1]\times\mathbb{R}$ ។

តាមនិយមន័យ យើងបាន៖

$$[0\ ,1]\times\mathbb{R}=\{(x,\ y) : 0\le x\le 1 \wedge y\in\mathbb{R}\}$$ ។

រូបទី១១



លក្ខណៈនៃផលគុណដេកាត

ក. $(A \subseteq X \wedge B \subseteq Y) \Rightarrow A \times B \subseteq X \times Y$

ខ. $A \times B = \varnothing \Leftrightarrow A = \varnothing \vee B = \varnothing$

គ. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

ឃ. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

ង. $(A \neq \varnothing \wedge A \times B = A \times C) \Rightarrow B = C$ ។

យើងស្រាយបញ្ជាក់នូវលក្ខណៈ ក. ដូចខាងក្រោម៖

យើងមាន $\forall (m, n) : (m, n) \in A \times B \overset{\text{def}}{\leftrightarrow} m \in A \wedge n \in B$

ប៉ុន្តែ $A \subseteq X \wedge B \subseteq Y$ នាំឱ្យ $m \in X \wedge n \in Y$ ។

តាមនិយមន័យ នាំឱ្យ $(m, n) \in X \times Y$ ។

ដូចនេះ យើងបាន $A \times B \subseteq X \times Y$ ។

ចំណែកឯលក្ខណៈ ខ. គ. ឃ. និង ង. ទុកដូចជាលំហាត់។

១.១០ គ្រួសារនៃផ្នែក

និយមន័យទី១៨ គេឱ្យ E ជាសំណុំមួយ និង $\mathscr{F}$ ជាសំណុំនៃផ្នែក X របស់ E ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខណៈសម្គាល់ P ។ គេបាន $\mathscr{F} = \{ X : X \in \mathscr{P}(E) \wedge P(X) \}$ ហៅថា គ្រួសារនៃផ្នែក X របស់ E ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខណៈសម្គាល់ P ។ [១៧]

ប្រជុំនៃធាតុទាំងអស់របស់ $\mathscr{F}$ កំណត់ដោយ

$$\bigcup_{\mathscr{F}} X = \{ x : \exists X \in \mathscr{F}, x \in X \}$$ ។

[១៧] ឈីម ម៉េង " *ពីជគណិតទូទៅ* " ភ្នំពេញ សាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ ២០១១, ទំព័រ២៦

ប្រសព្វនៃធាតុទាំងអស់របស់ $\mathscr{F}$ កំណត់ដោយ

$$\bigcap_{\mathscr{F}} X = \{x : \forall X \in \mathscr{F},\ x \in X\}$$ ។

និយមន័យទី១៩ គេឱ្យ U ជាសំណុំសាកល និង I ជាសំណុំនៃសន្ទស្សន៍។ គេតាង $\{X_i\}_{i \in I}$ ជាគ្រួសារនៃផ្នែក (សំណុំ) របស់ U ដែលមានសន្ទស្សន៍ក្នុងសំណុំ I ។

ប្រជុំនៃធាតុទាំងអស់របស់ $\{X_i\}_{i \in I}$ កំណត់ដោយ

$$\bigcup_{i \in I} X_i = \{x \in U : \exists i \in I,\ x \in X_i\}$$ ។

ប្រសព្វនៃធាតុទាំងអស់របស់ $\{X_i\}_{i \in I}$ កំណត់ដោយ

$$\bigcap_{i \in I} X_i = \{x \in U : \forall i \in I,\ x \in X_i\}$$ ។[១៨]

ឧទាហរណ៍ទី២២ គេឱ្យសំណុំ $X_1 = (1, 8)$, $X_2 = (4, 14)$ និង $X_3 = (7, 20)$ ។ គណនាសំណុំ $\bigcup_{i=1}^{3} X_i$ និង $\bigcap_{i=1}^{3} X_i$ ។

យើងគណនាសំណុំ $\bigcup_{i=1}^{3} X_i$ និង $\bigcap_{i=1}^{3} X_i$ ដូចតទៅ៖

$$\bigcup_{i=1}^{3} X_i = X_1 \cup X_2 \cup X_3 = (1, 8) \cup (4, 14) \cup (7, 20) = (1, 20)$$

និង

$$\bigcap_{i=1}^{3} X_i = X_1 \cap X_2 \cap X_3 = (1, 8) \cap (4, 14) \cap (7, 20) = (7, 8)$$ ។

---

[១៨] Dipak Chatterjee, *Abstract Algebra*, New Delhi, Prentice-Hall of India Private Limited, 2001, p. 5

ឧទាហរណ៍ទី២៣ គេឱ្យ $A_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ ។ ចូរគណនា $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ និង $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i$ ។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖

យើងបាន

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup A_{n+1} \cup \ldots$$

$$= \{1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots\} = \mathbb{N}$$

និង $$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \cap A_{n+1} \cap \ldots = A_1 = \{1\}$$ ។

ឧទាហរណ៍ទី២៤ គេឱ្យ $I = \mathbb{N}$ និង $A_i = \{x \in \mathbb{R} : 0 \le x \le 1 - (1/2)^i\}$ ។

គណនា $\bigcup_{i \in I} A_i$ និង $\bigcap_{i \in I} A_i$ ។

ចំពោះឧទាហរណ៍ទី២៤នេះ ទុកដូចជាលំហាត់។

លំហាត់ទ្រឹស្តីសំណុំ

១- ចូរពណ៌នាសំណុំរាប់អស់ខាងក្រោមដោយសរសេរធាតុរបស់វា៖

ក. សំណុំនៃចំនួនគត់វិជ្ជមានទាំងអស់ក្នុងចន្លោះត្រឹមពី 15 ទៅត្រឹម 21។

ខ. សំណុំនៃចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបទាំងអស់នៃតម្លៃដាច់ខាតតូចជាង 1 ។

គ. សំណុំដែលមានផ្ទៃក្រឡានៃរង្វង់មានកាំ 1 , 2 និង 3 ។

ឃ. សំណុំ $\{x \in \mathbb{Z} : x^2 < 13\}$ ។

ង. សំណុំនៃសំណល់ទាំងអស់ នៅពេលដែលចំនួនគត់វិជ្ជមានមួយចែក នឹង 7 ។

២- សរសេរសំណុំខាងក្រោមជាទម្រង់ $\{x \in S : ...\}$ ចំពោះសំណុំ S សមរម្យ៖

ក. សំណុំ $\{0 , \pm 1 , \pm 2 , \pm 3 , \pm 4 , \pm 5 , \pm 6\}$ ។

ខ. ចន្លោះបិទ $[1 , 2]$ ។

គ. សំណុំនៃចំនួនសនិទានទាំងអស់ក្នុងចន្លោះបិទ 0 និង 1 ។

ឃ. សំណុំនៃចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបទាំងអស់ដែលជាពហុគុណនៃ 4 ។

ង. សំណុំ $\{3 , -1 , 7 , -5 , 11 , -9 , ...\}$ ។

៣- បង្ហាញថា បើ A ជាសំណុំរងនៃ $\varnothing$ នោះគេបាន $A = \varnothing$ ។

៤- គេឱ្យ A ជាសំណុំនៃចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបទាំងអស់ដែលជាពហុគុណនៃ 5 : $A = 5\mathbb{Z}$ ។

ក. សរសេរ A ជាទម្រង់ $\{x \in S : ...\}$ ចំពោះសំណុំ S សមរម្យ។

ខ. បង្ហាញថា បើ $x , y \in A$ នោះគេបាន $x + y \in A$ និង $x \cdot y \in A$ ។

៥- គេមាន $A = n\mathbb{Z}$ ដែល $n \in \mathbb{Z}$ ។ បង្ហាញថា បើ $x , y \in A$ នោះគេបាន $x + y \in A$ និង $x \cdot y \in A$ ។

៦- គេឱ្យសំណុំ $A=\{n\in\mathbb{Z}: n$ ជាពហុគុណនៃ $4\}$ និង $B=\{n\in\mathbb{Z}: n^2$ ជា

ពហុគុណនៃ $4\}$ ។

ក. បង្ហាញថា $A\subseteq B$ ។

ខ. តើ B ជាសំណុំរងនៃ A ដែរឬទេ? ពីព្រោះអ្វី?

៧- គេមានសំណុំ $B=\{x\in\mathbb{N}: 0<x<9\}$ និង $C=\{x\in\mathbb{N}: 7<x<16\}$ ។ គណនាសំណុំ $B\cup C$, $B\cap C$, $B\setminus C$ និង $C\setminus B$ ។

៨- គេឱ្យសំណុំ $A=\{n\in\mathbb{Z}: n+3$ ជាចំនួនគត់សេស $\}$ ។ បង្ហាញថា A ស្មើនឹងសំណុំនៃចំនួនគត់គូទាំងអស់។

៩- បង្ហាញថា បើ $A\cap B\subseteq A\subseteq A\cup B$ ចំពោះគ្រប់សំណុំ A និង B ។

១០- ចូររកឧទាហរណ៍មួយអំពីគម្របនៃសំណុំ $A=\{1, 2, 3\}$ ។

១១- គេមាន $E=\{n\in\mathbb{Z}: n=8t+7, t\in\mathbb{Z}\}$ និង $F=\{n\in\mathbb{Z}: n=4t+3, t\in\mathbb{Z}\}$ ។

ក. ចូរសរសេរប្រាំធាតុនៃ E និង ប្រាំធាតុនៃ F ។

ខ. តើ E ជាសំណុំរងនៃ F ដែរឬទេ? ពីព្រោះអ្វី?

គ. តើ F ជាសំណុំរងនៃ E ដែរឬទេ? ពីព្រោះអ្វី?

១២- គណនាសំណុំនិងសំណុំរងបំពេញរបស់វាខាងក្រោម៖

ក. $A=\{x\in\mathbb{Z}: x>5\}$, $U=\mathbb{Z}$

ខ. $B=\{x\in\mathbb{Z}: 1\le x\le 10\}$, $U=\mathbb{Z}$

គ. $C=\{x\in\mathbb{Z}: 1\le x\le 10\}$, $U=\mathbb{R}$

ឃ. $D=\{x\in\mathbb{R}: -2<x\le 4\}$, $U=\mathbb{R}$

ង. $E=\{x\in\mathbb{R}: x<2 \vee x>20\}$, $U=\mathbb{R}$ ។

១៣- គេឱ្យសំណុំ $E=\{x\in\mathbb{Z}:-5<x\leq 12\}$ និង $F=\{x\in\mathbb{Z}:-1\leq x<20\}$ ។ គណនាសំណុំ $E\,\Delta\,F$ ។

១៤- គណនាសំណុំ $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$ និង $B\setminus A$ បើគេមានសំណុំ A និង B ខាងក្រោម៖

ក. $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, $B=\{6,7,9,11,12\}$

ខ. $A=\{1,2,3,\dots,100\}$, $B=\{1,3,5,\dots,99\}$

គ. $A=\{0,1,2,3,\dots\}$, $B=\{0,1,2,3\}$

ឃ. $A=\{0,1,2,3,\dots\}$, $B=\{2,4,6,\dots\}$

ង. $A=\{x\in\mathbb{R}:x>4\}$, $B=\{x\in\mathbb{R}:x<10\}$ ។

១៥- ចូររកឧទាហរណ៍មួយអំពីបំណែកនៃសំណុំ $B=\{2, 3, 4, 5\}$ ។

១៦- គេឱ្យសំណុំ $A=\{1, 2, 3\}$ និង $B=\{2, 3, 4\}$ ។ ចូរកំណត់សំណុំ $A\times B$, $B\times A$ និង $B\times B$ ។

១៧- រកសំណុំស្វ័យគុណនៃសំណុំ $E=\{1, 3\}$ និង $F=\{\varnothing, 1, \{2\}\}$ ។

១៨- បង្ហាញថា សំណុំ $\{2\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}+1\}$ ជាបំណែកនៃ $\mathbb{Z}$ ។

១៩- គេឱ្យ $I=\mathbb{N}$ និង $B_i=\{x\in\mathbb{R}:0\leq x\leq 1-(1/3)^i\}$ ។

គណនា $\bigcup\limits_{i\in I}B_i$ និង $\bigcap\limits_{i\in I}B_i$ ។

២០- គេមាន A និង B ជាពីរសំណុំរងក្នុងសំណុំសាកល U ។ បង្ហាញថា $A\subseteq B$ លុះត្រាតែ $B^c\subseteq A^c$ ។

២១- បង្ហាញថា បើសំណុំ $A\subseteq X \wedge B\subseteq Y$ នោះគេបានសំណុំ $A\times B\subseteq X\times Y$ ។

២២- គេមាន A និង B ជាពីរសំណុំរងក្នុងសំណុំសាកល U ។ បង្ហាញថា $A \subseteq B$ លុះត្រាតែ $A \cup B = B$ ។

២៣- គេមាន A និង B ជាពីរសំណុំរងក្នុងសំណុំសាកល U ។ បង្ហាញថា

$A \subseteq B$ លុះត្រាតែ $A \cap B = A$ ។

២៤- បង្ហាញថាសំណុំ $A \times B = \varnothing$ លុះត្រាតែ $A = \varnothing \vee B = \varnothing$ ។

២៥- គេមាន A និង B ជាពីរសំណុំរងក្នុងសំណុំសាកល U ។ បង្ហាញថា

ក. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ ខ. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ ។

២៦- គេឱ្យ $U = \mathbb{R}$, $A = [1\ ,\ 4]$, $B = (0\ ,\ 2)$ និង $C = [2\ ,\ +\infty)$ ។ ចូរកំណត់សំណុំខាងក្រោម៖

ក. $A \cup B$ ខ. $A \cap B$ គ. $A \cup C$

ឃ. $A \cap C$ ង. $B \cup C$ ច. $B \cap C$ ។

២៧- បង្ហាញថាសំណុំ $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ ។

២៨- បង្ហាញថាសំណុំ $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ ។

២៩- បង្ហាញថា បើសំណុំ $A \neq \varnothing$ និង $A \times B = A \times C$ នោះគេបានសំណុំ $B = C$ ។

៣០- បង្ហាញថាសំណុំ $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$ ។

៣១- បង្ហាញថាសំណុំ $(A \times C) \cup (B \times D) \subseteq (A \cup B) \times (C \cup D)$ ។

៣២- គេឱ្យ $A_n = \{x : x$ ជាពហុគុណនៃ $n\}$ ដែល $x\ ,\ n \in \mathbb{N}$ ។ គណនា៖

ក. $A_2 \cap A_7$ ខ. $A_6 \cap A_8$ គ. $A_3 \cap A_{12}$

ឃ. $A_3 \cup A_{12}$ ង. $A_s \cup A_{st}$ ច. $A_s \cap A_{st}$

ដែល $s\ ,\ t \in \mathbb{N}$ ។

៣៣- គេឱ្យ $I=\mathbb{N}$, $C_i=\{x\in\mathbb{Z}:0\le x\le i\}$ និង $D_i=\{x\in\mathbb{Z}:0\le x\le i+1\}$ ។

គណនា $\bigcup_{i\in I}C_i$, $\bigcup_{i\in I}D_i$, $\bigcap_{i\in I}C_i$ និង $\bigcap_{i\in I}D_i$ ។

៣៤- គេឱ្យ $X=\{0,1,2,3,4,5\}$ ។ ចូរកំណត់សំណុំនិងសំណុំរងបំពេញរបស់វាខាងក្រោម៖

ក. $A=\{x\in X:3x-12=0\}$

ខ. $B=\{x\in X:x^2-7x+12=0\}$

គ. $C=\{x\in X:2x+1\ge 0\}$

ឃ. $D=\{x\in X:3x+7<0\}$

ង. $E=\{x\in X:x^3-25x=0\}$

ច. $F=\{x\in X:9x^2-121<0\}$ ។

៣៥- គេមាន A, B និង C ជាបីសំណុំរងក្នុងសំណុំសាកល U ។

ក. បង្ហាញថា $A\,\Delta\,\varnothing=A$ ។

ខ. បង្ហាញថា $A\,\Delta\,U=A^c$ ។

គ. បង្ហាញថា $A\,\Delta\,B=B\,\Delta\,A$ ។

ឃ. បង្ហាញថា $A\,\Delta\,B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$ ។

ង. បង្ហាញថា $(A\,\Delta\,B)\,\Delta\,C=A\,\Delta\,(B\,\Delta\,C)$ ។

៣៦- បើ $\{A_i\}_{i\in I}$ និង $\{B_j\}_{j\in J}$ ជាគ្រួសារពីរនៃសំណុំដែល $A_i\subseteq B_j$ ចំពោះ $i\in I$ និង $j\in J$ នីមួយៗ នោះបង្ហាញថា $\bigcup_{i\in I}A_i\subseteq\bigcup_{j\in J}B_j$ និង $\bigcap_{j\in J}B_j\subseteq\bigcap_{i\in I}A_i$ ។

៣៧- គេឱ្យ $A=\{x\in\mathbb{R}:-1\le x\le 3\}$ និង $B=\{x\in\mathbb{R}:0<x<5\}$ ។ ចូរកំណត់សំណុំខាងក្រោម៖

ក. $A\cup B$ ខ. $A\cap B$ គ. $A \setminus B$

ឃ. $B \setminus A$ ង. $A\times B$ ច. $A \,\Delta\, B$ ។

៣៨- បង្ហាញថា $[0\,,1]=\bigcup_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{n}\,,1+\frac{1}{n}\right)=\bigcap_{n=1}^{+\infty}\left[-\frac{1}{n}\,,1+\frac{1}{n}\right]$ ។

៣៩- បើ A និង B ជាពីរសំណុំរាប់អស់ នោះបង្ហាញថា $A\cup B$ និង $A\cap B$ ជាសំណុំរាប់ អស់ ហើយ $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ ។

៤០- តាង $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ជាគ្រួសារនៃសំណុំក្នុង U និង តាង $S_n=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$ ។

បង្ហាញថា $S_n=(A_1\setminus A_2)\cup(A_2\setminus A_3)\cup\ldots\cup(A_{n-1}\setminus A_n)\cup\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)$ ។

៤១- គណនា $\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{i\,,i+1\}$ និង $\bigcap_{i\in\mathbb{N}}\{i\,,i+1\}$ ។

៤២- គេមាន A និង B ជាពីរសំណុំដែល $A\neq B$ ។ ឧបមាថា Z ជាសំណុំមួយដែល $A\times Z=B\times Z$ ។ បង្ហាញថា $Z=\varnothing$ ។

៤៣- គេឱ្យ I ជាសំណុំមិនទទេ និង $\{A_i\}_{i\in I}$ ជាគ្រួសារនៃសំណុំមានសន្ទស្សន៍ដោយ I ហើយ B ជាសំណុំមួយ។

ក. បង្ហាញថា $B\times\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)=\bigcup_{i\in I}(B\times A_i)$ ។

ខ. បង្ហាញថា $B\times\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)=\bigcap_{i\in I}(B\times A_i)$ ។

៤៤- សង់សំណុំខាងក្រោមតាមន័យធរណីមាត្រ៖

ក. $\{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 4\}$

ខ. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}$

គ. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = 16\}$

ឃ. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + (y-2)^2 < 1\}$

ង. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y\}$

ច. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 5 , x \geq 0 , y \geq 0\}$

ឆ. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 2 , x^2 + y^2 < 4\}$ ។

ជំពូកទី២

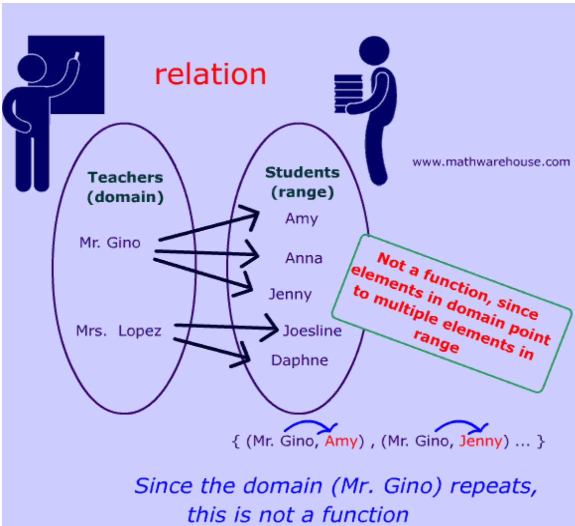
ទំនាក់ទំនង

(Relations)

២.១ ទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ

និយមន័យទី១ គេមានសំណុំពីរ A និង B ។ ទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ $\mathscr{R}$ ពីសំណុំ A ទៅសំណុំ B ជាសំណុំរងនៃ $A \times B$ ។ ក្នុងនេះ A ហៅថា សំណុំដើម និង B ហៅថា សំណុំចុងនៃទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ $\mathscr{R}$ ។[១៩]

រូបទី១២៖ ទំនាក់ទំនង[២០]



---

[១៩] http://alas.matf.bg.ac.rs/~mi10164/Materijali/DS.pdf, op. cit., p. 24

[២០] https://www.thinglink.com/scene/636534935942856704

- បើ $(x,y)\in\mathscr{R}$ នោះគេថា x ទាក់ទងនឹង y តាមទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ $\mathscr{R}$ និងកំណត់សរសេរដោយ $x\,\mathscr{R}\,y$ ។

- បើ $(x,y)\notin\mathscr{R}$ នោះគេថា x មិនទាក់ទងនឹង y តាមទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ $\mathscr{R}$ និងកំណត់សរសេរដោយ $x\,\not{\mathscr{R}}\,y$ ។

- បើ $\mathscr{R}$ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុពីសំណុំ A ទៅ A មានន័យថា $\mathscr{R}$ ជាសំណុំរងនៃ $A^2 = A\times A$ នោះគេថា $\mathscr{R}$ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុលើ A ។

ឧទាហរណ៍ទី១ តាង $A=\{2\,,3\}$ និង $B=\{1,2\}$ ។

ក. កំណត់សំណុំ $A\times B$ ។

ខ. កំណត់ទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុទាំងអស់ពីសំណុំ A ទៅសំណុំ B ។

យើងរកចម្លើយនូវសំណួរ ក. រីឯសំណួរ ខ. ទុកដូចជាលំហាត់។
តាមនិយមន័យ យើងបាន

$$\begin{aligned} A\times B &= \{(a,b) : a\in A\wedge b\in B\} \\ &= \{(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\} \text{ ។} \end{aligned}$$

និយមន័យទី២ ដែនកំណត់នៃទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ $\mathscr{R}$ ពីសំណុំ A ទៅសំណុំ B គឺជាសំណុំ D នៃធាតុ x ទាំងឡាយរបស់ A ដែលមានធាតុ $y\in B$ ហើយ $x\,\mathscr{R}\,y$ ។[២១]

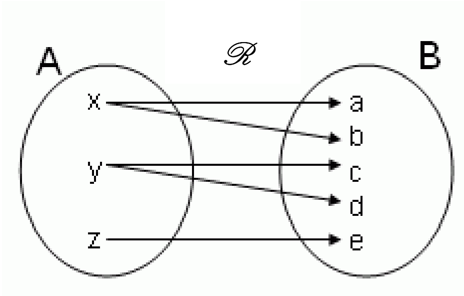
និយមន័យទី៣ រូបភាព (ឬសំណុំតម្លៃ) នៃទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ $\mathscr{R}$ ពីសំណុំ A ទៅសំណុំ B គឺជាសំណុំ I នៃធាតុ y ទាំងឡាយរបស់ B ដែលមានធាតុ $x\in A$ ហើយ $x\,\mathscr{R}\,y$ ។[២២]

---

[២១] យឹម អាយុវឌ្ឍនៈវិជ្ជា " *ពីជគណិតកម្រិតខ្ពស់* " ភ្នំពេញ សាកលវិទ្យាល័យ ខេមរៈ ២០១៦ ទំព័រ១២

[២២] យឹម អាយុវឌ្ឍនៈវិជ្ជា -ដ.ឯ.ម- ទំព័រ១២

រូបទី១៣៖ ដ្យាក្រាមព្រួញតាងឱ្យ ទំនាក់ទំនង $\mathscr{R}$ ពីសំណុំ A ទៅសំណុំ B



ឧទាហរណ៍ទី២ គេឱ្យ $\mathscr{R}$ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេជាតុពីសំណុំ $A=\{1,2,3,4,5\}$ ទៅ $B=\{1,2,3,4\}$ ដែល

$$\mathscr{R}=\{(1,1),(1,2),(3,2),(4,4),(3,4),(3,1)\}$$ ។

រកដែនកំណត់ និង សំណុំតម្លៃនៃទំនាក់ទំនងទ្វេជាតុ $\mathscr{R}$ ។

តាមនិយមន័យ យើងបាន៖

ដែនកំណត់នៃ $\mathscr{R}$ គឺ $D=\{1,1,3,4,3,3\}=\{1,3,4\}$

និងសំណុំតម្លៃនៃ $\mathscr{R}$ គឺ $D=\{1,2,2,4,4,1\}=\{1,2,4\}$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៣ គេឱ្យ $\mathscr{R}$ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេជាតុកំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ៖

$\forall x , y\in\mathbb{R} : x\ \mathscr{R}\ y$ លុះត្រាតែ $x^2+y^2=5$ ។

ក. កំណត់ជាតុទាំងអស់នៃ $\mathscr{R}$ ។ រួចរកជាតុខ្លះដែលមិនមែនជាជាតុរបស់ $\mathscr{R}$ ។

ខ. រកដែនកំណត់ និង រូបភាពនៃទំនាក់ទំនងទ្វេជាតុ $\mathscr{R}$ ។

ចំពោះឧទាហរណ៍ទី៣នេះ ទុកដូចជាលំហាត់។

២.២ ទំនាក់ទំនងទ្វេជាតុច្រាស

និយមន័យទី៤ គេឱ្យ $\mathscr{R}$ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេជាតុពីសំណុំ A ទៅសំណុំ B ។ គេហៅថា ទំនាក់ទំនងទ្វេជាតុច្រាសនៃ$\mathscr{R}$ តាងដោយ $\mathscr{R}^{-1}$ គឺជាទំនាក់ទំនងទ្វេ

ជាតុពីសំណុំ B ទៅសំណុំ A ដែលជាសំណុំនៃគូ (y,x) ដែល $(x,y)\in \mathscr{R}$ ។[២៣]

ឧទាហរណ៍ទី៤ គេឱ្យ $\mathscr{R}$ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុពីសំណុំ $A=\{1 , 2 , 3\}$ ទៅ $B=\{1, 2, 3 , 4\}$ ដែល

$\mathscr{R}=\{(1 , 1) , (1 , 2) , (3 , 2) , (3 , 4) , (2 , 3) , (3 , 1)\}$ ។

ក. កំណត់ម៉ាទ្រីសនៃ $\mathscr{R}$ ។

ខ. កំណត់ទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុច្រាសនៃ $\mathscr{R}$ និងម៉ាទ្រីសនៃ $\mathscr{R}^{-1}$ ។

យើងដោះស្រាយរកចម្លើយនូវសំណួរ ក. និង ខ. ដូចខាងក្រោម។

ក. កំណត់ម៉ាទ្រីសនៃ $\mathscr{R}$ ។

ដោយ $\mathscr{R}$ ជាទំនាក់ទំនងពីសំណុំ A ទៅ B ដែល $n(A)=3$ និង $n(B)=4$ ។ នាំឱ្យម៉ាទ្រីស M នៃ $\mathscr{R}$ គឺជាម៉ាទ្រីស 3×4 ដែល

$$M=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix} ។$$

ខ. កំណត់ទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុច្រាសនៃ $\mathscr{R}$ និងម៉ាទ្រីសនៃ $\mathscr{R}^{-1}$ ។

តាមនិយមន័យ យើងបានទំនាក់ទំនងច្រាសនៃ $\mathscr{R}$ គឺ

$$\begin{aligned}\mathscr{R}^{-1} &=\{(y,x)\in B\times A:\ (x,y)\in \mathscr{R}\}\\ &=\{(1 , 1) , (2 , 1) , (2 , 3) , (4 , 3) , (3 , 2) , (1 , 3)\}\text{។}\end{aligned}$$

ម្យ៉ាងទៀត ដោយ $\mathscr{R}^{-1}$ ជាទំនាក់ទំនងពីសំណុំ B ទៅ A ដែល $n(B)=4$ និង $n(A)=3$ ។ នាំឱ្យម៉ាទ្រីស N នៃ $\mathscr{R}^{-1}$ គឺជាម៉ាទ្រីស 4×3 ដែល

$$N=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} ។$$

[២៣] http://alas.matf.bg.ac.rs/~mi10164/Materijali/DS.pdf, op. cit., p. 25

២.៣ បណ្ដាក់នៃទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ

និយមន័យទី៥ គេឱ្យ $\mathscr{R}_1$ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុពីសំណុំ A ទៅសំណុំ B និង $\mathscr{R}_2$ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុពីសំណុំ B ទៅសំណុំ C។ បណ្ដាក់នៃទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ $\mathscr{R}_1$ និង $\mathscr{R}_2$ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុពីសំណុំ A ទៅសំណុំ C កំណត់សរសេរដោយ $\mathscr{R}_2 \circ \mathscr{R}_1$ និងកំណត់ដោយ $x\,\mathscr{R}_2 \circ \mathscr{R}_1\, z$ បើមាន $y \in B$ ដែល $x\,\mathscr{R}_1\, y$ និង $y\,\mathscr{R}_2\, z$ ។[២៤]

ឧទាហរណ៍ទី៥ គេឱ្យសំណុំ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $C = \{1, 2, 3\}$ ហើយ $\mathscr{R}_1 = \{(1,1), (2,2), (3,2), (3,4), (2,3), (4,1)\}$ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុពីសំណុំ A ទៅសំណុំ B និង $\mathscr{R}_2 = \{(1,2), (2,2), (3,2), (3,1), (2,3)\}$ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុពីសំណុំ B ទៅសំណុំ C។ កំណត់បណ្ដាក់នៃទំនាក់ទំនង $\mathscr{R}_1$ និង $\mathscr{R}_2$ ហើយកំណត់ម៉ាទ្រីសរបស់វា។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ។

តាមសម្មតិកម្ម យើងមាន៖

$(1,1) \in \mathscr{R}_1$ និង $(1,2) \in \mathscr{R}_2$ នាំឱ្យ $(1,2) \in \mathscr{R}_2 \circ \mathscr{R}_1$។

$(2,2) \in \mathscr{R}_1$ និង $(2,2) \in \mathscr{R}_2$ នាំឱ្យ $(2,2) \in \mathscr{R}_2 \circ \mathscr{R}_1$។

$(2,2) \in \mathscr{R}_1$ និង $(2,3) \in \mathscr{R}_2$ នាំឱ្យ $(2,3) \in \mathscr{R}_2 \circ \mathscr{R}_1$។

$(3,2) \in \mathscr{R}_1$ និង $(2,2) \in \mathscr{R}_2$ នាំឱ្យ $(3,2) \in \mathscr{R}_2 \circ \mathscr{R}_1$។

$(3,2) \in \mathscr{R}_1$ និង $(2,3) \in \mathscr{R}_2$ នាំឱ្យ $(3,3) \in \mathscr{R}_2 \circ \mathscr{R}_1$។

$(2,3) \in \mathscr{R}_1$ និង $(3,1) \in \mathscr{R}_2$ នាំឱ្យ $(2,1) \in \mathscr{R}_2 \circ \mathscr{R}_1$។

$(2,3) \in \mathscr{R}_1$ និង $(3,2) \in \mathscr{R}_2$ នាំឱ្យ $(2,2) \in \mathscr{R}_2 \circ \mathscr{R}_1$។

---

[២៤] គណៈកម្មាធិការជាតិអចិន្ត្រៃយ៍នៃខេមរយានកម្មសិក្សា -ដ.ឯ.ម- ទំព័រ១៣

$$(4\,,1)\in\mathscr{R}_1 \text{ និង } (1\,,2)\in\mathscr{R}_2 \text{ នាំឱ្យ } (4\,,2)\in\mathscr{R}_2\circ\mathscr{R}_1 \text{។}$$

ដូចនេះ បណ្តាក់នៃទំនាក់ទំនង $\mathscr{R}_1$ និង $\mathscr{R}_2$ គឺ

$\mathscr{R}_2\circ\mathscr{R}_1=\{(1\,,2)\,,(2\,,2)\,,(2\,,3)\,,(3\,,2)\,,(3\,,3)\,,(2\,,1)\,,(4\,,2)\}$ ។

ម្យ៉ាងទៀត ដោយ $\mathscr{R}_2\circ\mathscr{R}_1$ ជាទំនាក់ទំនងពីសំណុំ A ទៅ C ដែល $n(A)=5$ និង $n(C)=3$ ។ នាំឱ្យម៉ាទ្រីស M នៃ $\mathscr{R}_2\circ\mathscr{R}_1$ គឺជាម៉ាទ្រីស 5×3 ដែល

$$M=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&1\\0&1&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} \text{។}$$

ទ្រឹស្តីបទទី១ គេមាន $\mathscr{R}_1$, $\mathscr{R}_2$ និង $\mathscr{R}_3$ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុពីសំណុំ A ទៅសំណុំ B, ពីសំណុំ B ទៅសំណុំ C និងពីសំណុំ C ទៅសំណុំ D រៀងគ្នា។ នោះគេបាន $(\mathscr{R}_3\circ\mathscr{R}_2)\circ\mathscr{R}_1=\mathscr{R}_3\circ(\mathscr{R}_2\circ\mathscr{R}_1)$ ។

ទ្រឹស្តីបទទី១នេះ ទុកដូចជាលំហាត់។

២.៤ លក្ខណៈនៃទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ

និយមន័យទី៦[២៥] គេឱ្យ $\mathscr{R}$ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុលើសំណុំ A ។

- គេថា $\mathscr{R}$ មានលក្ខណៈខ្លួនឯងលើសំណុំ A បើ $\forall x\in A : x\,\mathscr{R}\,x$ ។
- គេថា $\mathscr{R}$ មានលក្ខណៈឆ្លុះលើសំណុំ A បើ

  $\forall x\,,y\in A : x\,\mathscr{R}\,y$ នាំឱ្យ $y\,\mathscr{R}\,x$ ។
- គេថា $\mathscr{R}$ មានលក្ខណៈឆ្លុះស្មើលើសំណុំ A បើ

  $\forall x\,,y\in A : (x\,\mathscr{R}\,y$ និង $y\,\mathscr{R}\,x)$ នាំឱ្យ $x=y$ ។

---

[២៥] គណៈកម្មាធិការជាតិអបិវឌ្ឍន៍នៃខេមរយានកម្មសិក្សា -ដ.ឯ.ម- ទំព័រ១៤

- គេថា $\mathscr{R}$ មានលក្ខណៈឆ្លងលើសំណុំ A បើ

$$\forall x, y, z \in A : (x \mathscr{R} y \text{ និង } y \mathscr{R} z) \text{ នាំឱ្យ } x \mathscr{R} z \text{ ។}$$

យើងឃើញថា បើ $\mathscr{R}$ មានលក្ខណៈឆ្លុះស្មើលើសំណុំ A នោះ $\mathscr{R}$ មានលក្ខណៈខ្លួនឯងលើសំណុំ A តែប្រាសមកវិញវាមិនពិតទេ។

ឧទាហរណ៍ទី៦ គេឱ្យ $\mathscr{R}$ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុលើសំណុំ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ គឺ $\mathscr{R} = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$ ។

ចូរសិក្សាលក្ខណៈ (ឬ ប្រភេទ) នៃទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ $\mathscr{R}$ ។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖

- ដោយធាតុនៃ $\mathscr{R}$ មាន $(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)$ នាំឱ្យ $\mathscr{R}$ មានលក្ខណៈខ្លួនឯងលើសំណុំ A ។

- $\mathscr{R}$ មានលក្ខណៈឆ្លុះលើសំណុំ A ។

- $\mathscr{R}$ គ្មានលក្ខណៈឆ្លុះស្មើលើសំណុំ A ទេ ពីព្រោះ $(1,2), (2,1) \in \mathscr{R}$ តែ $1 \neq 2$ ។

- $\mathscr{R}$ មានលក្ខណៈឆ្លងលើសំណុំ A ។

ឧទាហរណ៍ទី៧ គេឱ្យ $\mathscr{R}$ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុលើសំណុំ $\mathbb{R}$ កំណត់ដោយ

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : a \mathscr{R} b \text{ លុះត្រាតែ } a \leq b \text{ ។}$$

ចូរសិក្សាលក្ខណៈនៃទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ $\mathscr{R}$ ។

យើងសិក្សាលក្ខណៈនៃទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ $\mathscr{R}$ ដូចជាលក្ខណៈខ្លួនឯង លក្ខណៈឆ្លុះ លក្ខណៈឆ្លុះស្មើនិងលក្ខណៈឆ្លុះស្មើដែលមានដំណោះស្រាយដូចខាងក្រោម។

- ចំពោះ $\forall a \in \mathbb{R}$ នាំឱ្យ $a \leq a$ ។ នាំឱ្យ $a \mathscr{R} a$ មានន័យថា $\mathscr{R}$ មានលក្ខណៈខ្លួនឯងលើសំណុំ $\mathbb{R}$ ។

- ចំពោះ $\forall a, b \in \mathbb{R}$ បើ $a \mathscr{R} b$ សមមូល $a \leq b$ តែជាទូទៅមិននាំឱ្យបាន $b \leq a$ សមមូល $b \mathscr{R} a$ ។ ជាឧទាហរណ៍ បើ $a = 6, b = 8 \in \mathbb{R}$ នាំឱ្យ

$a=6\le 8=b$ តែមិនអាចទាញបាន $b=8\le 6=a$ ទេ មានន័យថា $\mathscr{R}$ គ្មានលក្ខណៈឆ្លុះលើសំណុំ $\mathbb{R}$ ។

- ចំពោះ $\forall a,b\in\mathbb{R}$ បើ $a\,\mathscr{R}\,b$ និង $b\,\mathscr{R}\,a$ សមមូល $a\le b$ និង $b\le a$ នាំឱ្យ $a=b$ ។ ដូចនេះ $\mathscr{R}$ មានលក្ខណៈឆ្លុះស្មើលើសំណុំ $\mathbb{R}$ ។

- ចំពោះ $\forall a,b,c\in\mathbb{R}$ បើ $a\,\mathscr{R}\,b$ និង $b\,\mathscr{R}\,c$ នាំឱ្យ $a\le b$ និង $b\le c$ នាំឱ្យ $a\le c$ មានន័យថា $a\,\mathscr{R}\,c$ ។ ដូចនេះ $\mathscr{R}$ មានលក្ខណៈឆ្លងលើសំណុំ $\mathbb{R}$ ។

២.៥ ទំនាក់ទំនងសមមូល សំណុំផលចែក និង បំណែក

និយមន័យទី៧ ទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ $\mathscr{R}$ កំណត់លើសំណុំ A ជាទំនាក់ទំនងសមមូល លុះត្រាតែ $\mathscr{R}$ មានលក្ខណៈខ្លួនឯង លក្ខណៈឆ្លុះ និង លក្ខណៈឆ្លង។[២៦]

ក្នុងករណី $\mathscr{R}$ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលលើសំណុំ A គេជំនួសការសរសេរ $x\,\mathscr{R}\,y$ ដោយ $x\equiv y\ (\mathrm{mod}\ \mathscr{R})$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៨ តាង $\mathbb{N}=\{1, 2, 3,...\}$ និងគេឱ្យ $\mathscr{R}$ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុកំណត់លើ $\mathbb{Z}$ ដែល $\forall x, y\in\mathbb{Z} : x\,\mathscr{R}\,y$ លុះត្រាតែ $p\,|\,x-y,\ p\in\mathbb{N}$ ។ បង្ហាញថា $\mathscr{R}$ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលលើ $\mathbb{Z}$ ។

យើងដោះស្រាយនូវឧទាហរណ៍ទី៨ដូចតទៅ៖

យើងមាន $\forall x, y\in\mathbb{Z} : x\,\mathscr{R}\,y$ លុះត្រាតែ $p\,|\,x-y,\ p\in\mathbb{N}$

លុះត្រាតែ $\exists k\in\mathbb{Z} : x-y=kp$ ។

- ចំពោះ $\forall x\in\mathbb{Z}$ នាំឱ្យ $\exists k=0\in\mathbb{Z} : x-x=0=0\,(p)$ ។ នាំឱ្យ $x\,\mathscr{R}\,x$ មានន័យថា $\mathscr{R}$ មានលក្ខណៈខ្លួនឯងលើសំណុំ $\mathbb{Z}$ ។

- ចំពោះ $\forall x,y\in\mathbb{Z}$ បើ $x\,\mathscr{R}\,y$ នាំឱ្យ $\exists k\in\mathbb{Z} : x-y=kp$ ។

---

[២៦] គណៈកម្មាធិការជាតិអចិន្ត្រៃយ៍នៃខេមរយានកម្មសិក្សា -ដ.ឯ.ម- ទំព័រ១៤

នាំឱ្យ $\exists k'=-k\in\mathbb{Z}\ :\ y-x=-(x-y)=-(kp)=(-k)p=k'p$
មានន័យថា $y\,\mathscr{R}\,x$ ។ នាំឱ្យ $\mathscr{R}$ មានលក្ខណៈឆ្លុះលើសំណុំ $\mathbb{Z}$ ។

- ចំពោះ $\forall x,y,z\in\mathbb{Z}$ បើ $x\,\mathscr{R}\,y$ និង $y\,\mathscr{R}\,z$ នាំឱ្យ

$\exists k_1\in\mathbb{Z}\ :\ x-y=k_1p$ និង $\exists k_2\in\mathbb{Z}\ :\ x-y=k_2p$ ។
នាំឱ្យ $x-z=(x-y)+(y-z)=k_1p+k_2p=(k_1+k_2)p=k_3p$
ដែល $k_3=k_1+k_2\in\mathbb{Z}$ មានន័យថា $x\,\mathscr{R}\,z$ ។
នាំឱ្យ $\mathscr{R}$ មានលក្ខណៈឆ្លងលើសំណុំ $\mathbb{Z}$ ។
ដូចនេះ យើងបាន $\mathscr{R}$ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលលើ $\mathbb{Z}$ ។

និយមន័យទី៨ គេឱ្យ $\mathscr{R}$ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលលើសំណុំមិនទទេ A ។ ចំពោះ $a\in A$ គេបានថ្នាក់ a តាមទំនាក់ទំនងសមមូល $\mathscr{R}$ គឺជាសំណុំនៃធាតុ $x\in A$ ដែលសមមូលនឹង a តាម $\mathscr{R}$ ។ គេកំណត់សរសេរដោយ $\dot{a}$ ឬ Cl(a) ឬ $\bar{a}$ ឬ $[a]$ ។[២៧]
ដូចនេះ គេបាន $[a]=\{x\in A\ :\ a\,\mathscr{R}\,x\}$ ។

ទ្រឹស្តីបទទី២ ក- បើ $x\in[a]$ នោះគេបាន $[x]$ និង $[a]$ ជាថ្នាក់តែមួយ និងផ្ទុយមកវិញ។

ខ- ចំពោះ $\forall x,y\in A$ បើ $x\,\mathscr{R}\,y \Leftrightarrow [x]=[y]$ ។[២៨]

ចំពោះទ្រឹស្តីបទទី២នេះ ទុកដូចជាលំហាត់។

និយមន័យទី៩ សំណុំនៃថ្នាក់សមមូលទាំងអស់នៃ A តាមទំនាក់ទំនងសមមូល $\mathscr{R}$ ហៅថា សំណុំផលចែកនៃ A ដោយ $\mathscr{R}$ ។ កំណត់សរសេរដោយ $A/\mathscr{R}$

---

២៧ http://alas.matf.bg.ac.rs/~mi10164/Materijali/DS.pdf, op. cit., p. 32

២៨ Ibid., p. 32

និងគេបាន $A/_{\mathscr{R}} = \{ [x] : x \in A \}$ ។[២៩]

ទ្រឹស្តីបទទី៣ គេឱ្យ $\mathscr{R}$ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលកំណត់លើសំណុំ A ។ គេបានសំណុំផលចែក $A/_{\mathscr{R}}$ ជាបំណែកនៃ A ។[៣០]

ចំពោះទ្រឹស្តីបទទី៣នេះ ទុកដូចជាលំហាត់។

ឧទាហរណ៍ទី៩ គេឱ្យ $\mathscr{R}$ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុកំណត់លើ $\mathbb{Z}$ ដែល

$\forall x, y \in \mathbb{Z} : x \mathscr{R} y$ លុះត្រាតែ $3|x-y$ ។

ក- បង្ហាញថា $\mathscr{R}$ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលលើ $\mathbb{Z}$ ។

ខ- កំណត់ថ្នាក់ទាំងអស់តាម $\mathscr{R}$ និងសំណុំផលចែក។

គ- បង្ហាញថា សំណុំផលចែកនេះជាបំណែកនៃ $\mathbb{Z}$ ។

ចំពោះឧទាហរណ៍ទី៩នេះ ទុកដូចជាលំហាត់។

---

២៩ http://alas.matf.bg.ac.rs/~mi10164/Materijali/DS.pdf, op. cit., p. 32

៣០ Ibid., p. 32

លំហាត់ទំនាក់ទំនង

១- គេឱ្យ $A=\{2\,,3\}$ និង $B=\{1,2\,,3\}$ ។

ក. កំណត់សំណុំ $A\times B$ ។

ខ. តើមានប៉ុន្មានទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុពីសំណុំ A ទៅសំណុំ B ។

២- គេឱ្យ $\mathscr{R}$ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុពីសំណុំ $A=\{1\,,2\,,3\,,4\,,5\}$ ទៅ $B=\{1,2,3\,,4\}$ ដែល

$\mathscr{R}=\{(1\,,1)\,,(1\,,2)\,,(3\,,2)\,,(5\,,3)\,,(2\,,3)\,,(3\,,1)\}$ ។

ក. រកដែនកំណត់ និង សំណុំតម្លៃនៃទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ $\mathscr{R}$ ។

ខ. កំណត់ម៉ាទ្រីសនៃ $\mathscr{R}$ ។

គ. កំណត់ទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុប្រាសនៃ $\mathscr{R}$ និងម៉ាទ្រីសនៃ $\mathscr{R}^{-1}$ ។

៣- គេឱ្យ $\mathscr{R}$ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុលើសំណុំ $A=\{1\,,2\,,3\,,4\,,5\}$ កំណត់ដោយ $\forall a\,,b\in A: a\,\mathscr{R}\,b$ លុះត្រាតែ $a<b$ ។

ក. រកដែនកំណត់ និង សំណុំតម្លៃនៃទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ $\mathscr{R}$ ។

ខ. កំណត់ម៉ាទ្រីសនៃ $\mathscr{R}$ ។

គ. កំណត់ទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុប្រាសនៃ $\mathscr{R}$ និងម៉ាទ្រីសនៃ $\mathscr{R}^{-1}$ ។

៤- គេឱ្យសំណុំ $A=\{1\,,2\,,3\,,4\,,5\}\,,B=\{1\,,2\,,3\,,4\}\,,C=\{1\,,2\,,3\,,4\,,5\}$ ហើយ $\mathscr{R}_1=\{(1\,,1)\,,(4\,,2)\,,(3\,,2)\,,(3\,,4)\,,(2\,,3)\,,(4\,,1)\}$ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុពី A ទៅ B និង $\mathscr{R}_2=\{(1\,,2)\,,(2\,,1)\,,(3\,,1)\,,(3\,,4)\,,(2\,,3)\}$ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុពី B ទៅ C ។

ក. រកដែនកំណត់ និង សំណុំតម្លៃនៃទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ $\mathscr{R}_1$ និង $\mathscr{R}_2$ ។

ខ. រកម៉ាទ្រីសនៃ $\mathscr{R}_1$ និង $\mathscr{R}_2$ ។

គ. កំណត់បណ្ដាក់នៃទំនាក់ទំនង $\mathscr{R}_1$ និង $\mathscr{R}_2$ ហើយកំណត់ម៉ាទ្រីសរបស់វា។

ឃ. កំណត់បណ្តាក់ប្រាសនិងកំណត់ម៉ាទ្រីសរបស់វា។

៥- គេឱ្យ $\mathscr{R}$ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុលើសំណុំ $B=\{1,2,3,4,6,12\}$ កំណត់ដោយ $\forall a , b\in B : a \mathscr{R} b$ លុះត្រាតែ $a|b$ ។

ក. សរសេរទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ $\mathscr{R}$ ជាសំណុំនៃគូមានលំដាប់។

ខ. រកដែនកំណត់ និង សំណុំតម្លៃនៃទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ $\mathscr{R}$ ។

គ. កំណត់ទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុប្រាសនៃ $\mathscr{R}$ និងម៉ាទ្រីសនៃ $\mathscr{R}^{-1}$ ។

៦- គេឱ្យ $\mathscr{R}$ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុលើសំណុំ $\mathbb{R}^*$ កំណត់ដោយ៖

$$\forall x , y\in \mathbb{R}^* : x \mathscr{R} y \text{ លុះត្រាតែ } x+\frac{1}{x}=y+\frac{1}{y} \text{ ។}$$

ចូរសិក្សាលក្ខណៈនៃទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ $\mathscr{R}$ ។

៧- គេឱ្យ $\mathscr{R}$ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុលើសំណុំ $A=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ កំណត់ដោយ $\forall x , y\in A : x \mathscr{R} y$ លុះត្រាតែ $2|(x-y)$ ។

បង្ហាញថា $\mathscr{R}$ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលលើ A ។

៨- គេឱ្យសំណុំ $E=\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ និង ទំនាក់ទំនង $x \mathscr{R} y$ លុះត្រាតែ $\exists c\in \mathbb{Z}, y=cx$ ។ តើ $\mathscr{R}$ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលលើ E ឬទេ? ពីព្រោះអ្វី?

៩- គេឱ្យ $\mathscr{R}$ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុកំណត់លើ $\mathbb{Z}$ ដែល

$$\forall x, y\in \mathbb{Z} : x \mathscr{R} y \text{ លុះត្រាតែ } 4|x-y \text{ ។}$$

ក- បង្ហាញថា $\mathscr{R}$ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលលើ $\mathbb{Z}$ ។

ខ- កំណត់ថ្នាក់ទាំងអស់តាម $\mathscr{R}$ និងសំណុំផលចែក។

គ- បង្ហាញថា សំណុំផលចែកនេះជាបំណែកនៃ $\mathbb{Z}$ ។

១០- គេឱ្យ $\mathscr{R}$ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុលើសំណុំ $\mathscr{P}(U)$ កំណត់ដោយ៖

$$\forall A , B\in \mathscr{P}(U) : A \mathscr{R} B \text{ លុះត្រាតែ } A\subseteq B \text{ ។}$$

ចូរសិក្សាលក្ខណៈនៃទំនាក់ទំនងទ្វេជាគុ $\mathscr{R}$ ។

១១- គេឱ្យ $\mathscr{R}$ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេជាគុលើសំណុំ $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ កំណត់ដោយ៖

$$(a\,,b)\ \mathscr{R}\ (c\,,d)\ \Leftrightarrow\ a+d=b+c$$ ។

ក- បង្ហាញថា $\mathscr{R}$ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលលើ $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ។

ខ- រកថ្នាក់សមមូលនៃជាគុ $(3, 4)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ។

១២- គេឱ្យ $\mathscr{R}$ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេជាគុលើសំណុំ $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ កំណត់ដោយ៖

$$(a\,,b)\ \mathscr{R}\ (c\,,d)\ \Leftrightarrow\ a\cdot d=b\cdot c$$ ។

ចូរសិក្សាលក្ខណៈនៃទំនាក់ទំនងទ្វេជាគុ $\mathscr{R}$ ។

១៣- គេឱ្យ $\mathscr{R}$ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេជាគុលើសំណុំ $\mathbb{Z}$ កំណត់ដោយ៖

$x\ \mathscr{R}\ y\ \Leftrightarrow x+y$ ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបគូ។

ក- បង្ហាញថា $\mathscr{R}$ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលលើ $\mathbb{Z}$ ។

ខ- រកថ្នាក់សមមូលនៃជាគុ $p\in\mathbb{Z}$ ។

១៤- គេឱ្យ $\mathscr{R}$ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេជាគុកំណត់លើ $\mathbb{Z}$ ដែល

$\forall x, y\in\mathbb{Z}\ :\ x\ \mathscr{R}\ y$ លុះត្រាតែ $5|x-y$ ។

ក. បង្ហាញថា $\mathscr{R}$ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលលើ $\mathbb{Z}$ ។

ខ. កំណត់ថ្នាក់ទាំងអស់តាម $\mathscr{R}$ និងសំណុំផលចែក។

គ. បង្ហាញថា សំណុំផលចែកនេះជាបំណែកនៃ $\mathbb{Z}$ ។

១៥- លើ $\mathbb{R}^*$ គេកំណត់ទំនាក់ទំនងទ្វេជាគុ $\mathscr{R}$ មួយដោយ៖

$$x\ \mathscr{R}\ y\ \Leftrightarrow x+\frac{1}{x}=y+\frac{1}{y}$$ ។

ក. បង្ហាញថា $\mathscr{R}$ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលលើ $\mathbb{R}^*$ ។

ខ. រកថ្នាក់សមមូលនៃជាគុ $m\in\mathbb{R}^*$ ។

១៦- លើ $\mathbb{R}^*$ គេកំណត់ទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ $\mathscr{R}$ មួយដោយៈ

$$x \,\mathscr{R}\, y \Leftrightarrow x^2 - \frac{1}{x^2} = y^2 - \frac{1}{y^2}$$ ។

ក. បង្ហាញថា $\mathscr{R}$ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលលើ $\mathbb{R}^*$ ។

ខ. រកថ្នាក់សមមូលនៃធាតុ $b \in \mathbb{R}^*$ ។

១៧- លើ $\mathbb{R}$ គេកំណត់ទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ $\mathscr{R}$ មួយដោយៈ

$$a \,\mathscr{R}\, b \;\Leftrightarrow\; a^2 - b^2 = a - b$$ ។

ក. បង្ហាញថា $\mathscr{R}$ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលលើ $\mathbb{R}$ ។

ខ. រកថ្នាក់សមមូលនៃធាតុ $x \in \mathbb{R}$ ។

១៨- គេឱ្យ $\mathscr{R}$ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុកំណត់លើ $\mathbb{Z}$ ដែល

$\forall x, y \in \mathbb{Z} : x \,\mathscr{R}\, y$ លុះត្រាតែ $6 | x - y$ ។

ក. បង្ហាញថា $\mathscr{R}$ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលលើ $\mathbb{Z}$ ។

ខ. កំណត់ថ្នាក់ទាំងអស់តាម $\mathscr{R}$ និងសំណុំផលចែក។

គ. បង្ហាញថា សំណុំផលចែកនេះជាបំណែកនៃ $\mathbb{Z}$ ។

១៩- លើ $\mathbb{R}$ គេកំណត់ទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ $\mathscr{R}$ មួយដោយៈ

$$\forall a, b \in \mathbb{R},\ a \,\mathscr{R}\, b \;\Leftrightarrow\; \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} = a - b$$ ។

ក. បង្ហាញថា $\mathscr{R}$ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលលើ $\mathbb{R}$ ។

ខ. រកថ្នាក់សមមូលនៃចំនួន 1 , 8 , $\dfrac{8}{3\sqrt{3}}$ ។

២០- លើ $\mathbb{Q}$ គេកំណត់ទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ $\mathscr{R}$ មួយដោយៈ

$$x \,\mathscr{R}\, y \;\Leftrightarrow \exists\, h \in \mathbb{Z} : x = \frac{3y + h}{3}$$ ។

ក. បង្ហាញថា $\mathscr{R}$ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលលើ $\mathbb{Q}$ ។

ខ. រកថ្នាក់សមមូលនៃធាតុ $x \in \mathbb{Q}$ ។

គ. តើ $\frac{2}{3}\,\mathscr{R}\,\frac{4}{5}$ ឬទេ? ពីព្រោះអ្វី?

២១- គេឱ្យ $\mathscr{R}$ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលកំណត់លើសំណុំ A ។ បង្ហាញថា ថ្នាក់សមមូលនៃ $\mathscr{R}$ ជាបំណែកនៃ A ។

ជំពូកទី៣

អនុគមន៍ និង អនុវត្តន៍

(**Functions and Applications**)

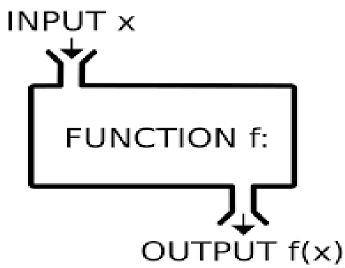
៣.១ អនុគមន៍

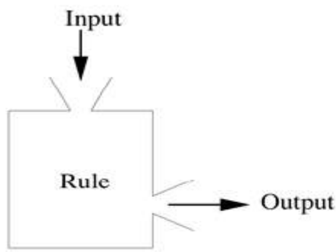
និយមន័យទី១ គេឱ្យ $\mathscr{R}$ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុពីសំណុំ A ទៅសំណុំ B។ គេថា $\mathscr{R}$ ជាអនុគមន៍ពីសំណុំ A ទៅសំណុំ B បើគ្រប់ធាតុ x របស់ A ទាក់ទងនឹងធាតុ y មួយយ៉ាងច្រើនរបស់ B។ [៣១]

ជាទូទៅ គេជំនួសទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ $\mathscr{R}$ ដោយ f ។ យើងបានអនុគមន៍

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

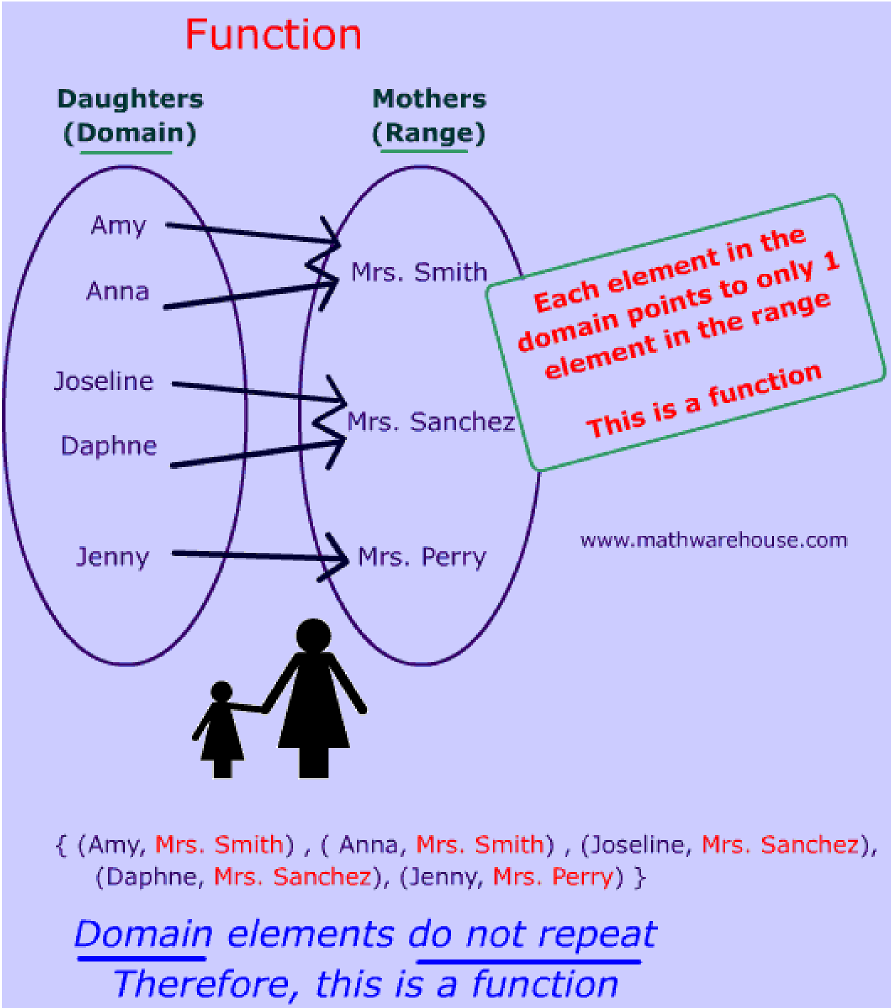
ក្នុងនេះសំណុំ A ហៅថា សំណុំដើមនិងសំណុំ B ហៅថា សំណុំចុងនៃអនុគមន៍ f ។





រូបទី១៤៖ អនុគមន៍

[៣១] គណៈកម្មាធិការជាតិអចិន្ត្រៃយនៃខេមរយានកម្មសិក្សា -ដ.ឯ.ម- ទំព័រ២៥



រូបទី១៥៖ អនុគមន៍ [៣២]

[៣២] https://www.google.com/search?q=pictures+of+functions+in+mathematics&tbm=isch&tbo=u&source=univ&sa=X&ved=0ahUKEwiDyfKggsbaAhUJErwKHZvOAhEQsAQIJg&biw=1525&bih=730#imgdii=1y9uhMUZLxJSoM:&imgrc=9G-m9rsP0247-M:

ឧទាហរណ៍ទី១ តាងសំណុំ $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ និង $B=\{1,2,3,4,5\}$ ។ គេឱ្យទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ f ពីសំណុំ A ទៅសំណុំ B កំណត់ដោយ $f(1)=1,\ f(2)=3,\ f(5)=1$ ។ តើទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុនេះ ជាអនុគមន៍ដែរឬទេ ? ពីព្រោះអ្វី ?

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖

ទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ $f: A \to B$ ជាអនុគមន៍ ពីព្រោះគ្រប់ធាតុ x របស់ A ទាក់ទងនឹងធាតុ y មួយយ៉ាងច្រើនរបស់ B ។

ឧទាហរណ៍ទី២ តាងសំណុំ $E=\{1,2,3,4,5,6\}$ និង $F=\{1,2,3,4,5\}$ ។ គេឱ្យទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ g ពីសំណុំ E ទៅសំណុំ F កំណត់ដោយ $g(1)=2,\ g(2)=4,\ g(3)=2,\ g(4)=3,\ \ g(3)=5$ ។ តើទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុនេះ ជាអនុគមន៍ដែរឬទេ ? ពីព្រោះអ្វី ?

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖

ទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ $g: E \to F$ មិនមែនជាអនុគមន៍ទេ ពីព្រោះធាតុ 3 របស់ E ទាក់ទងនឹងពីរធាតុរបស់ F គឺ 2 ផងនិង 5 ផង។

និយមន័យទី២ គេឱ្យអនុគមន៍ $f:\ A \to B$

$$x \mapsto y=f(x)$$

- ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f គឺជាសំណុំ D នៃធាតុ x ទាំងអស់នៃ A ដែលមានរូបភាពតាម f [៣៣] ឬក៏ជាសំណុំនៃតម្លៃ $x \in A$ ដែលអាចមានទាំងអស់ដែលធ្វើឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់បាន។

- រូបភាពឬសំណុំនៃរូបភាពនៃអនុគមន៍ f គឺជាសំណុំនៃធាតុ y ទាំងអស់នៃ B ដែលជារូបភាពនៃធាតុរបស់ A និងកំណត់សរសេរដោយ $f(A)$ ឬ $\mathrm{Im}(f)$ ។

---

[៣៣] គណៈកម្មាធិការជាតិអចិន្ត្រៃយនៃខេមរយានកម្មសិក្សា -ជ.ឯ.ម- ទំព័រ២៦

ពីនិយមន័យខាងលើ យើងបាន

$$D=\{x\in A : \exists !\, y\in B\ ,\ y=f(x)\}$$

និង $f(A)=\{y\in B : \exists x\in A\ ,\ y=f(x)\}=\{f(x) : x\in A\}$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៣ តាងសំណុំ $E=\{1,2,3,4,5,6\}$ និង $F=\{1,2,3,4,5\}$។ គេឱ្យទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ g ពីសំណុំ E ទៅសំណុំ F កំណត់ដោយ

$g(1)=2,\ g(2)=4,\ g(3)=2,\ g(4)=3,\ \ g(6)=5$ ។

ក. តើទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុនេះ ជាអនុគមន៍ដែរឬទេ? ពីព្រោះអ្វី?

ខ. បើវាជាអនុគមន៍ ចូររកដែនកំណត់ និង រូបភាពនៃ g ។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖

ក. ទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ $g : E\to F$ ជាអនុគមន៍ ពីព្រោះគ្រប់ធាតុ x របស់ E ទាក់ទងនឹងធាតុ (មានរូបភាព) y មួយយ៉ាងច្រើនរបស់ F។

ខ. រកដែនកំណត់ និង រូបភាពនៃ g ។

តាមនិយមន័យ យើងបាន៖

- ដែនកំណត់នៃ g គឺ $D_g=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6\}$។
- រូបភាពនៃ g គឺ $g(E)=\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$។

ឧទាហរណ៍ទី៤ គេឱ្យអនុគមន៍ $f : \mathbb{R}\ \to\ \mathbb{R}$

$$x\ \mapsto\ y=f(x)=2x^2+1$$

រកដែនកំណត់ និង រូបភាពនៃ f ។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖

ដោយអនុគមន៍ f កំណត់បានចំពោះ $\forall x\in\mathbb{R}$

នាំឱ្យដែនកំណត់នៃ f គឺ $D_f=\mathbb{R}$។

ម្យ៉ាងទៀត ចំពោះ $\forall x\in\mathbb{R}$ នាំឱ្យ $x^2\ge 0$។

នាំឱ្យ $y=f(x)=2x^2+1\ge 1$ ។

ដូចនេះ រូបភាពនៃ f គឺ $Im(f)=[1,+\infty)$ ។

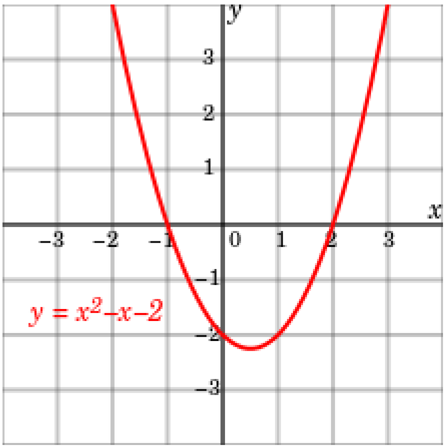
និយមន័យទី៣

- គេថា $f : A \to B$ ជាអនុគមន៍ថេរ បើ $\forall x \in A , f(x)=k , k$ ជាចំនួនថេរ។

- គេថា $f : A \to B$ ជាអនុគមន៍លីនេអ៊ែ បើ $\forall x \in A , f(x)=ax$ ដែល a ជាចំនួនថេរខុសពីសូន្យ។

- គេថា $f : A \to B$ ជាអនុគមន៍អាហ្វីន បើ $\forall x \in A, f(x)=ax+b$ ដែល $a, b \in \mathbb{R} , a \neq 0$ ។

- គេថា $f : A \to B$ ជាអនុគមន៍ប៉ារ៉ាបូលឬអនុគមន៍ដឺក្រេទី២ បើ $\forall x \in A , \ f(x)=ax^2+bx+c$ ដែល $a, b, c \in \mathbb{R} , a \neq 0$ ។



រូបទី១៦៖ ក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ $y=f(x)=x^2-x-2$

- គេថា $f : A \to B$ ជាអនុគមន៍ដឺក្រេទី n បើ

$$\forall x \in A , \ p_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$$

ដែល a_i ជាចំនួនថេរ ចំពោះ $i \in \{0,1,2,...\}$ ។

៣.២ អនុគមន៍បង្រួម និង អនុគមន៍បន្លាយ

និយមន័យទី៤ គេឱ្យ $f : A \to B$ ជាអនុគមន៍ និង E ជាផ្នែកមួយនៃ A ។ អនុវត្តន៍ $g : E \to B$ ដែលចំពោះ $\forall x \in E : g(x) = f(x)$ ហៅថា អនុគមន៍បង្រួមនៃ f លើ E ហើយ f ហៅថា អនុគមន៍បន្លាយរបស់ g ទៅ A និងកំណត់សរសេរដោយ $g = f/_E$ ។[៣៤]

ឧទាហរណ៍ទី៥ គេឱ្យ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ និង $g : [-\pi/2 , \pi/2] \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = 3|\cos x| \qquad\qquad x \mapsto g(x) = 3\cos x$$

បង្ហាញថា $g = f/_{[-\pi/2, \pi/2]}$ ។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖

ចំពោះ $\forall x \in [-\pi/2 , \pi/2]$ នាំឱ្យ $\cos x \geq 0$ និង $|\cos x| = \cos x$ ។

នាំឱ្យ $f(x) = 3|\cos x| = 3\cos x = g(x)$ ។

ដូចនេះ យើងបាន $g = f/_{[-\pi/2, \pi/2]}$ ។

៣.៣ អនុវត្តន៍

និយមន័យទី៥ គេថា $\mathscr{R}$ ជាអនុវត្តន៍ពីសំណុំ A ទៅសំណុំ B បើវាជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុពីសំណុំ A ទៅសំណុំ B ដែលចំពោះគ្រប់ធាតុ x របស់ A សុទ្ធតែទាក់ទងនឹងធាតុ y មួយហើយតែមួយគត់របស់ B ។[៣៥]

ជាទូទៅ គេជំនួសទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ$\mathscr{R}$ ដោយ f ។ តាមនិយមន័យទី៥ យើងទាញថា អនុវត្តន៍ $f : A \to B$ ជាអនុគមន៍ដែលមានដែនកំណត់ស្មើនឹង

---

[៣៤] https://www.univ-sba.dz/fsi/lmd/ALGEBRE.pdf, p. 21

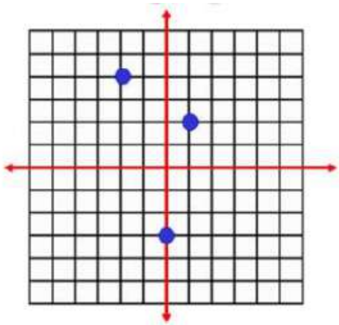
[៣៥] https://www.univ-sba.dz/fsi/lmd/ALGEBRE.pdf, op. cit., p. 18

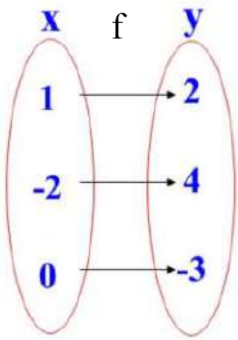
សំណុំដើម A ។

សំណុំនៃគូមានលំដាប់ $\{(1\,,\,2)\,,\,(-2,\,4)\,,\,(0\,,\,-3)\}$ អាចបង្ហាញជា៖

រូបទី១៧៖ តារាង **រូបទី១៨៖ ក្រាហ្វ**

x	y
1	2
-2	4
0	-3





រូបទី១៩៖ អនុវត្តន៍ $f : X \to Y$

ឧទាហរណ៍ទី៦ តាង $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ និង $B=\{1,2,3,4,5\}$ ។ គេឱ្យអនុគមន៍ f ពីសំណុំ A ទៅសំណុំ B កំណត់ដោយ

$f(1)=1,\ f(2)=3,\ f(4)=1,\ f(3)=4,\ f(5)=3$ ។ តើអនុគមន៍នេះ ជាអនុវត្តន៍ដែរឬទេ ? ពីព្រោះអ្វី ?

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖

អនុគមន៍ $f : A \to B$ មិនមែនជាអនុវត្តន៍ទេ ពីព្រោះធាតុ 6 របស់ A មិនទាក់ទងនឹងធាតុ y របស់ B ទេ។

ឧទាហរណ៍ទី៧ តាង $E=\{1,2,3,4,5,6\}$ និង $F=\{1,2,3,4,5\}$។ គេឱ្យអនុគមន៍ g ពីសំណុំ E ទៅសំណុំ F កំណត់ដោយ

$g(1)=2,\ g(2)=4,\ g(3)=2,\ g(4)=3,\ g(5)=4,\ g(6)=1$ ។

តើអនុគមន៍នេះ ជាអនុវត្តន៍ដែរឬទេ ? ពីព្រោះអ្វី ?

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖

អនុគមន៍ $g: E \to F$ ជាអនុវត្តន៍ ពីព្រោះគ្រប់ធាតុ f របស់ E ទាក់ទងនឹងធាតុ (មានរូបភាព) y មួយហើយតែមួយគត់របស់ F ។

ឧទាហរណ៍ទី៨ អនុគមន៍ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ជាអនុវត្តន៍។

$$x \mapsto f(x) = 2\cos x - 3\sin x$$

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖

អនុគមន៍ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ជាអនុវត្តន៍ ពីព្រោះដែនកំណត់នៃ f គឺ $D_f = \mathbb{R}$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៩ អនុគមន៍ $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ មិនមែនជាអនុវត្តន៍ទេ។

$$x \mapsto g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖

អនុគមន៍ g កំណត់បាន កាលណា

$x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow |x| \geq 1 \Leftrightarrow x \leq -1 \vee x \geq 1$ ។

នាំឱ្យដែនកំណត់នៃ g គឺ $D_g = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \neq \mathbb{R}$ ។

ដូចនេះ អនុគមន៍ $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ មិនមែនជាអនុវត្តន៍ទេ។

៣.៤ រូបភាព និង រូបភាពច្រាសនៃផ្នែកមួយ

និយមន័យទី៦ គេឱ្យ $f: A \to B$ ជាអនុគមន៍ ឬ អនុវត្តន៍ ហើយ E ជាផ្នែកមួយនៃ A ។ គេបានរូបភាពនៃផ្នែក E របស់ A តាម f កំណត់សរសេរដោយ $f(E)$ គឺជាសំណុំ

$$f(E) = \{y \in B : \exists x \in E,\ y = f(x)\}$$ ។[៣៦]

និយមន័យទី៧ គេឱ្យ $f: A \to B$ ជាអនុគមន៍ ឬ អនុវត្តន៍ ហើយ F ជាផ្នែកមួយនៃ B ។ គេបានរូបភាពច្រាសនៃផ្នែក F របស់ B កំណត់សរសេរដោយ

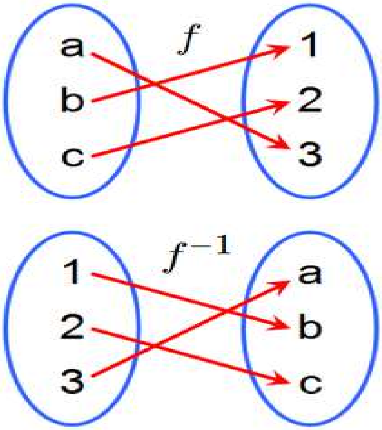
---

៣៦ https://www.univ-sba.dz/fsi/lmd/ALGEBRE.pdf, op. cit., p. 21

$f^{-1}(F)$ គឺជាសំណុំ

$$f^{-1}(F) = \{x \in A : f(x) \in F\}$$ ។[៣៧]

ឧទាហរណ៍ទី១០ តាង $A = \{a, b, c\}$ និង $B = \{1, 2, 3\}$ ។ គេឱ្យអនុគមន៍ f ពីសំណុំ A ទៅសំណុំ B កំណត់ដោយ $f(a) = 3$, $f(b) = 1$, $f(c) = 2$ ។



រូបទី២០៖ រូបភាព និង រូបភាពច្រាស

ឧទាហរណ៍ទី១១ តាង $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ និង $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ។ គេឱ្យអនុគមន៍ f ពីសំណុំ A ទៅសំណុំ B កំណត់ដោយ

$f(1) = 1$, $f(2) = 3$, $f(3) = 1$, $f(4) = 4$, $f(5) = 3$, $f(6) = 2$ ។

ក. រកដែនកំណត់ និង រូបភាពនៃ f ។

ខ. កំណត់សំណុំ $f(\{1,3,5\})$ និង $f^{-1}(\{1,2,3,5\})$ ។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖

ក. រកដែនកំណត់ និង រូបភាពនៃ f ។

តាមនិយមន័យ យើងបាន៖

[៣៧] https://www.univ-sba.dz/fsi/lmd/ALGEBRE.pdf, op. cit., p. 21

– ដែនកំណត់នៃ f គឺ $D_f = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ។

– រូបភាពនៃ f គឺ $f(A) = \{1, 2, 3, 4\}$ ។

ខ. កំណត់សំណុំ $f(\{1,3,5\})$ និង $f^{-1}(\{1,2,3,5\})$ ។

តាមនិយមន័យ យើងបាន៖

$$f(\{1,3,5\}) = \{f(1), f(3), f(5)\} = \{1, 1, 3\} = \{1, 3\}$$

និង

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{1, 2, 3, 5\}) &= \{f^{-1}(1), f^{-1}(2), f^{-1}(3), f^{-1}(5)\} \\ &= \{1, 2, 3, 5, 6\} \text{ ។} \end{aligned}$$

ឧទាហរណ៍ទី១២ គេឱ្យអនុគមន៍ $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto g(x) = 5$$

កំណត់សំណុំ $g(\mathbb{R}), g^{-1}(\{5\}), g^{-1}(\mathbb{R}), g^{-1}([6, 10))$ និង $g^{-1}((-6, 6))$ ។

ចំពោះឧទាហរណ៍ទី១២នេះ ទុកដូចជាលំហាត់។

លក្ខណៈនៃអនុវត្តន៍ [៣៨]

គេឱ្យ $f : A \to B$ ជាអនុវត្តន៍ ហើយ X_1, X_2, X ជាផ្នែកនៃ A និង Y_1, Y_2, Y ជាផ្នែកនៃ B ។ គេបាន៖

ក. $X_1 \subseteq X_2 \to f(X_1) \subseteq f(X_2)$

ខ. $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$

គ. $f(X_1 \cap X_2) \subseteq f(X_1) \cap f(X_2)$

ឃ. $X \subseteq f^{-1}[f(X)]$

ង. $Y_1 \subseteq Y_2 \to f^{-1}(Y_1) \subseteq f^{-1}(Y_2)$

ច. $f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$

ឆ. $f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$

---

[៣៨] https://www.univ-sba.dz/fsi/lmd/ALGEBRE.pdf, op. cit., p. 22

ឃ. $f[f^{-1}(Y)] \subseteq Y$ ។

យើងធ្វើការស្រាយបញ្ជាក់នូវលក្ខណៈ ក. និង ខ. ប៉ុណ្ណោះ តែលក្ខណៈផ្សេងទៀត ទុកដូចជាលំហាត់។

ក. ស្រាយថា $f(X_1) \subseteq f(X_2)$ ។

ចំពោះ $\forall b \in f(X_1)$ នាំឱ្យ $\exists a \in X_1 : b = f(a)$ ។

ដោយ $a \in X_1$ តែ $X_1 \subseteq X_2$ នាំឱ្យ $a \in X_2$ ។

នាំឱ្យ $b = f(a) \in f(X_2)$ ។

ដូចនេះ យើងបាន $f(X_1) \subseteq f(X_2)$ ។

ខ. ស្រាយថា $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$ ។

តាង $m \in A$ ។ នាំឱ្យ

$$
\begin{aligned}
m \in f(X_1 \cup X_2) &\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists\, n \in X_1 \cup X_2 : m = f(n) \\
&\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists\, n\, [(n \in X_1 \vee n \in X_2) \wedge m = f(n)] \\
&\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists\, n\, [(n \in X_1 \wedge m = f(n)) \vee (n \in X_2 \wedge m = f(n))] \\
&\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} [\exists\, n\ (n \in X_1 \wedge m = f(n))] \vee [\exists\, n\ (n \in X_2 \wedge m = f(n))] \\
&\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} m \in f(X_1) \vee m \in f(X_2) \\
&\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} m \in f(X_1) \cup f(X_2)
\end{aligned}
$$
។

ដូចនេះ យើងបាន $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$ ។

៣.៥ លក្ខណៈនៃអនុវត្តន៍

និយមន័យទី៨ គេឱ្យ $f : A \to B$ ជាអនុវត្តន៍។ គេថា f ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់

កាលណា

$\forall x_1, x_2 \in A$ បើ $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

ឬ $\forall x_1, x_2 \in A$ បើ $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ ។[៣៩]

ឧទាហរណ៍ទី១៣ អនុវត្តន៍ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់។

$$x \mapsto f(x) = 3x - 2$$

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ បើ $x_1 \neq x_2 \Rightarrow 3x_1 \neq 3x_2$

$$\Rightarrow 3x_1 - 2 \neq 3x_2 - 2$$

$$\Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$ ។

តាមនិយមន័យ យើងបានអនុវត្តន៍ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់។

ឧទាហរណ៍ទី១៤ អនុវត្តន៍ $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ មិនមែនជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់ទេ។

$$x \mapsto g(x) = \frac{1}{2}|x|$$

ចំពោះឧទាហរណ៍ទី១៤នេះ ទុកដូចជាលំហាត់។

និយមន័យទី៩ គេឱ្យ $f : A \to B$ ជាអនុវត្តន៍។ គេថា f ជាអនុវត្តន៍ពេញកាលណា

$\forall y \in B, \exists x \in A : y = f(x)$[៤០] ឬ $f(A) = B$ ។

ឧទាហរណ៍ទី១៥ អនុវត្តន៍ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ជាអនុវត្តន៍ពេញ។

$$x \mapsto f(x) = 3x - 2$$

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖

តាង $y = f(x) \in \mathbb{R}$ ។ នាំឱ្យ $y = 3x - 2$ សមមូល $y + 2 = 3x$ សមមូល

---

៣៩ https://www.univ-sba.dz/fsi/lmd/ALGEBRE.pdf, op. cit., p. 24

៤០ Ibid., p. 24

$x=\dfrac{y+2}{3}\in\mathbb{R}$ ។

យើងបាន $\forall y\in\mathbb{R}\,,\exists\, x\in\mathbb{R}\,(x=\dfrac{y+2}{3}):y=f(x)$។

តាមនិយមន័យ នាំឱ្យអនុវត្តន៍ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ជាអនុវត្តន៍ពេញ។

ឧទាហរណ៍ទី១៦ អនុវត្តន៍ $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ មិនមែនជាអនុវត្តន៍ពេញទេ។

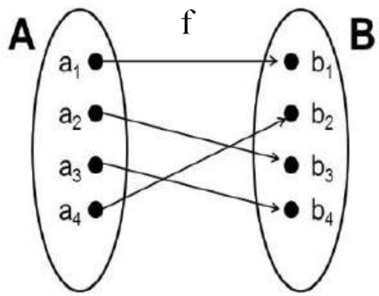
$$x\mapsto g(x)=\frac{1}{2}|x|$$

ចំពោះឧទាហរណ៍ទី១៦នេះ ទុកដូចជាលំហាត់។

និយមន័យទី១០ គេឱ្យ $f:A\to B$ ជាអនុវត្តន៍។ គេថា f ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ កាលណា

f ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់ និង ជាអនុវត្តន៍ពេញ

ឬ $\forall y\in B\,,\exists!\,x\in A:\ y=f(x)$ ។[៤១]



រូបទី២១៖ អនុវត្តន៍មួយទល់មួយ $f:A\to B$

ឧទាហរណ៍ទី១៧ អនុវត្តន៍ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ។

$$x\mapsto f(x)=3x-2$$

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖

---

[៤១] https://www.univ-sba.dz/fsi/lmd/ALGEBRE.pdf, op. cit., p. 24

តាមឧទាហរណ៍ទី១៣និងទី១៥ នាំឱ្យ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់ និង ជាអនុវត្តន៍ពេញ។ តាមនិយមន័យ នាំឱ្យ f ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ។

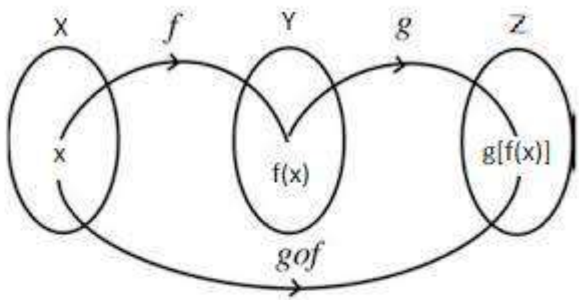
៣.៦ បណ្តាក់នៃអនុវត្តន៍

និយមន័យទី១១ គេឱ្យ X , Y និង Z ជាបីសំណុំ ហើយ $f:X\to Y$ ជាអនុវត្តន៍ដែលមានក្រាហ្វ G និង $g:Y\to Z$ ជាអនុវត្តន៍ដែលមានក្រាហ្វ H ។ យើងកំណត់អនុវត្តន៍ទី៣ $h:X\to Z$ ដែលមានក្រាហ្វ K និង $h(x)=g[f(x)]$ ចំពោះ $\forall x\in X$ ។

ដូចនេះ គេបាន $K=\{(x,z)\in X\times Z:\exists y\in Y,(x,y)\in G\wedge(y,z)\in H\}$ ។

អនុវត្តន៍ h ហៅថា អនុវត្តន៍បណ្តាក់នៃ f និង g ហើយកំណត់សរសេរដោយ

$h=g\circ f$ ។ [៤២]



រូបទី២២៖ អនុវត្តន៍បណ្តាក់ $h=g\circ f:X\to Z$

ឧទាហរណ៍ទី១៨ គេឱ្យអនុវត្តន៍ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ កំណត់ដោយ $f(x)=2x-5$ និង $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ កំណត់ដោយ $g(x)=-7x+8$ ។ ចូរកំណត់អនុវត្តន៍ $g\circ f,\ f\circ g$ និង $f\circ f$ ។

---

[៤២] ឈឹម ម៉េង " *ពីជគណិតទូទៅ* " ភ្នំពេញ សាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ ២០១១, ទំព័រ៤៦ និង ៤៧

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖

ចំពោះ $\forall x \in \mathbb{R}$ យើងបាន៖

$$(g\circ f)(x) = g[f(x)] = g(2x-5)$$
$$= -7(2x-5)+8 = -14x+43$$
$$(f\circ g)(x) = f[g(x)] = f(-7x+8)$$
$$= 2(-7x+8)-5 = -14x+11$$

និង $(f\circ f)(x) = f[f(x)] = f(2x-5)$

$$= 2(2x-5)-5 = 4x-15$$ ។

សម្គាល់ ១. ចំពោះអនុគមន៍វិញ ក៏មានអនុគមន៍បណ្ដាក់ដែរ។

២. អនុវត្តន៍បណ្ដាក់ $g\circ f$ កំណត់បាន លុះត្រាតែ សំណុំចុងនៃ f និងសំណុំដើមនៃ g ជាសំណុំតែមួយ។

៣. បើមាន $g\circ f$ និង $f\circ g$ នោះជាទូទៅ $g\circ f \neq f\circ g$ ។

ឧទាហរណ៍ទី១៩ គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = \sqrt{x^2-2}$ និង $g(x) = e^{3\sqrt{3x-1}}$ ។

ក. រកដែនកំណត់នៃ f និង g ។

ខ. កំណត់រកអនុគមន៍ $g\circ f$, $f\circ g$ និង $f\circ f$ ។

ចំពោះឧទាហរណ៍ទី១៩នេះ ទុកដូចជាលំហាត់។

ទ្រឹស្ដីបទទី១ គេឱ្យបួនសំណុំ A, B, C, D និងបីអនុវត្តន៍ $f : A \to B$, $g : B \to C$ និង $h : C \to D$ ។ នោះគេបាន $(h\circ g)\circ f = h\circ(g\circ f)$ ។

យើងធ្វើការស្រាយបញ្ជាក់នូវទ្រឹស្ដីបទទី១ដូចតទៅ៖

ចំពោះ $\forall x \in A$ យើងបាន៖

$$[(h\circ g)\circ f](x) \overset{\text{def}}{=} (h\circ g)[f(x)] \overset{\text{def}}{=} h[g[f(x)]]$$
$$\overset{\text{def}}{=} h[(g\circ f)(x)] \overset{\text{def}}{=} [h\circ(g\circ f)](x)$$ ។

ដូចនេះ យើងបាន $(h\circ g)\circ f = h\circ(g\circ f)$ ។

៣.៧ អនុវត្តន៍ខ្លួនឯង និង អនុវត្តន៍ច្រាស

និយមន័យទី១២ អនុវត្តន៍ $i_A : A \to A$ ជាអនុវត្តន៍ខ្លួនឯងលើសំណុំ A ។

$$x \mapsto i_A(x) = x$$

អនុវត្តន៍ខ្លួនឯង ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ។

និយមន័យទី១៣ គេឱ្យ $f : A \to B$ និង $g : B \to A$ ជាពីរអនុវត្តន៍។ យើងថា g ជាអនុវត្តន៍ច្រាសនៃ f លុះត្រាតែ $g \circ f = i_A$ និង $f \circ g = i_B$ ។ ក្នុងករណីនេះ យើងថា f មានចម្រាស។ [៤៣]

ឧទាហរណ៍ទី២០ គេឱ្យអនុវត្តន៍ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ កំណត់ដោយ $f(x) = x + 3$ និង $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ កំណត់ដោយ $g(x) = x - 3$ ។ បង្ហាញថា g ជាអនុវត្តន៍ច្រាសនៃ f ។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖

ចំពោះ $\forall x \in \mathbb{R}$ យើងបាន៖

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(x+3)$$
$$= (x+3) - 3 = x = i_{\mathbb{R}}(x)$$

និង $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(x-3)$

$$= (x-3) + 3 = x = i_{\mathbb{R}}(x)$$ ។

នាំឱ្យ $g \circ f = i_{\mathbb{R}}$ និង $f \circ g = i_{\mathbb{R}}$ ។

ដូចនេះ g ជាអនុវត្តន៍ច្រាសនៃ f ។

ទ្រឹស្តីបទទី២ បើ $f : A \to B$ មានចម្រាស នោះអនុវត្តន៍ច្រាសរបស់វាមានតែមួយគត់។

---

[៤៣] https://www.math.utah.edu/~wortman/1050-text-if.pdf, p. 92

យើងធ្វើការស្រាយបញ្ជាក់នូវទ្រឹស្តីបទទី២ដូចតទៅ៖
ដោយអនុវត្តន៍ $f:A\to B$ មានចម្រាស ហេតុនេះយើងឧបមាថាមានអនុវត្តន៍ច្រាសពីរនៃ f គឺ $g_1:B\to A$ និង $g_2:B\to A$ ។ យើងស្រាយថា $g_1=g_2$ ។
ដោយ g_1 និង g_2 ជាអនុវត្តន៍ច្រាសនៃ f នោះតាមនិយមន័យនាំឱ្យ
$g_1\circ f=i_A$, $f\circ g_1=i_B$, $g_2\circ f=i_A$ និង $f\circ g_2=i_B$ ។
ចំពោះ $\forall t\in B$ យើងបាន៖

$$\begin{aligned} g_1(t) &\overset{\text{def}}{=} g_1[i_B(t)] \overset{\text{def}}{=} g_1[(f\circ g_2)(t)] \\ &\overset{\text{TH1}}{=} [(g_1\circ f)\circ g_2](t) \overset{\text{def}}{=} (i_A\circ g_2)(t) \\ &\overset{\text{def}}{=} i_A[g_2(t)] \overset{\text{def}}{=} g_2(t) \end{aligned}$$ ។

នាំឱ្យ $g_1=g_2$ ។ ដូចនេះ ទ្រឹស្តីបទទី២ពិត។

និយមន័យទី១៤ យើងតាងអនុវត្តន៍ច្រាសតែមួយគត់នៃអនុវត្តន៍ $f:A\to B$ ដោយ $f^{-1}:B\to A$ ។

ទ្រឹស្តីបទទី៣ អនុវត្តន៍ $f:A\to B$ មានចម្រាស លុះត្រាតែ f ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ។ [៤៤]
ចំពោះទ្រឹស្តីបទទី៣នេះ ទុកដូចជាលំហាត់។

ឧទាហរណ៍ទី២១ បង្ហាញថា អនុវត្តន៍ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ កំណត់ដោយ $f(x)=x^3$ មានចម្រាស និង រករូបមន្តនៃអនុវត្តន៍ច្រាសផង។

យើងមានដំណោះស្រាយខាងក្រោម។ ជាដំបូង យើងបង្ហាញថា f ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ។
– ចំពោះ $\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}$ បើ $x_1\neq x_2 \Rightarrow x_1^3\neq x_2^3$

---
[៤៤] http://alas.matf.bg.ac.rs/~mi10164/Materijali/DS.pdf, op. cit., p. 46

$\Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ ។

តាមនិយមន័យ នាំឱ្យ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់។

$-$តាង $y = f(x) \in \mathbb{R}$ ។ នាំឱ្យ $y = x^3$ សមមូល $x = \sqrt[3]{y}$ ។

យើងបាន $\forall y \in \mathbb{R}$, $\exists\, x \in \mathbb{R}$ $(x = \sqrt[3]{y}) : y = f(x)$ ។

តាមនិយមន័យ នាំឱ្យ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ជាអនុវត្តន៍ពេញ។

នាំឱ្យ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ។ តាមទ្រឹស្ដីបទទី៣ នាំឱ្យ f មានចម្រាស។

យើងមានសមីការ $x = \sqrt[3]{y}$ ។ បន្ទាប់មក យើងប្ដូរអថេរ x ជា y និង y ជា x វិញក្នុងសមីការនេះ យើងបានរូបមន្តនៃអនុវត្តន៍ច្រាសគឺ $y = f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ ។

ទ្រឹស្ដីបទទី៤ គេឱ្យ $f : A \to B$ និង $g : B \to C$ ជាពីរអនុវត្តន៍។

ក. បើ f មានចម្រាស នោះ f^{-1} ក៏មានចម្រាស និង $(f^{-1})^{-1} = f$ ហើយវាជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ។

ខ. បើ f និង g ទាំងពីរមានចម្រាស នោះ $g \circ f$ ក៏មានចម្រាស និង $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ ។ [៤៥]

យើងធ្វើការស្រាយបញ្ជាក់នូវសំណួរ ក. ដូចខាងក្រោម ប៉ុន្តែសំណួរ ខ. ទុកដូចជាលំហាត់។

ក. ស្រាយថា f^{-1} មានចម្រាសនិង $(f^{-1})^{-1} = f$ ហើយវាជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ។

ដោយ $f : A \to B$ មានចម្រាស $f^{-1} : B \to A$ នោះតាមនិយមន័យនាំឱ្យ $f^{-1} \circ f = i_A$ និង $f \circ f^{-1} = i_B$ ។ នាំឱ្យ f^{-1} មានចម្រាស f ហើយ

---

[៤៥] ឃឹម អាយុវឌ្ឍនៈវិជ្ជា " *ពីជគណិតកម្រិតខ្ពស់* " ភ្នំពេញ សាកលវិទ្យាល័យ ខេមរៈ ២០១៦ ទំព័រ២៥

$(f^{-1})^{-1} = f$ ។ តាមទ្រឹស្តីបទទី៣ នាំឱ្យ $f^{-1}: B \to A$ ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ។

និយមន័យទី១៥ គេថា $f : E \to E$ ជាអនុវត្តន៍អាំងវ៉ូលុយស្យុង (Involutive) បើ $f = f^{-1}$ ឬ $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = i_E$ ។ [៤៦]

ឧទាហរណ៍ទី២២ អនុវត្តន៍ខ្លួនឯង ជាអនុវត្តន៍អាំងវ៉ូលុយស្យុង។

[៤៦] យឹម អាយុវឌ្ឍនៈវិជ្ជា " *ពីជគណិតកម្រិតខ្ពស់* " ភ្នំពេញ សាកលវិទ្យាល័យ ខេមរៈ ២០១៦ ទំព័រ២៥

លំហាត់អនុគមន៍ និង អនុវត្តន៍

១- គេឱ្យអនុគមន៍ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto y = f(x) = -3x^2 + 4$$

រកដែនកំណត់ និង រូបភាពនៃ f ។

២- គេឱ្យអនុគមន៍ $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto y = g(x) = 3e^{\sqrt{x^2-5}}$$

រកដែនកំណត់ និង រូបភាពនៃ g ។

៣- គេឱ្យអនុវត្តន៍ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ កំណត់ដោយ $f(x) = 3x + 7$ និង $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ កំណត់ដោយ $g(x) = -4x - 5$ ។ ចូរកំណត់អនុវត្តន៍ $g \circ f$, $f \circ g$, $f \circ f$ និង $g \circ g \circ g$ ។

៤- តើអនុគមន៍ $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ជាអនុវត្តន៍ឬទេ? ពីព្រោះអ្វី?

$$x \mapsto g(x) = \sqrt{2x-1}$$

រួចសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ g ផង។

៥- សិក្សាលក្ខណៈនៃអនុវត្តន៍ $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ កំណត់ដោយ $g(x) = 5|x| + 4$ ។

៦- សិក្សាលក្ខណៈនៃអនុវត្តន៍ $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ កំណត់ដោយ $f(x) = x + 1$ ។

៧- សិក្សាលក្ខណៈនៃអនុវត្តន៍ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ កំណត់ដោយ $f(x) = e^x$ ។

៨- សិក្សាលក្ខណៈនៃអនុវត្តន៍ $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ កំណត់ដោយ $g(n) = n^2 + 3$ ។

៩- សិក្សាលក្ខណៈនៃអនុវត្តន៍ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ កំណត់ដោយ $f(x) = \sin x$ ។

១០- សិក្សាលក្ខណៈនៃអនុវត្តន៍ $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ កំណត់ដោយ $g(x) = x^2$ ។

១១- សិក្សាលក្ខណៈនៃអនុវត្តន៍ $h:\mathbb{Z}\to\mathbb{Q}$ កំណត់ដោយ $h(x)=5^x$ ។

១២- គេឱ្យអនុវត្តន៍ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ កំណត់ដោយ $f(x)=2x+2$ និង $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ កំណត់ដោយ $g(x)=\frac{1}{2}x-1$ ។ បង្ហាញថា g ជាអនុវត្តន៍ច្រាសនៃ f ។

១៣- បង្ហាញថា អនុវត្តន៍ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ កំណត់ដោយ $f(x)=x^2$ គ្មានចម្រាសទេ។

១៤- ក. បង្ហាញថា អនុវត្តន៍ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ កំណត់ដោយ $f(x)=2x+5$ ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ។

ខ. ទាញថា f មានចម្រាសនិងកំណត់ f^{-1} ។

១៥- គេឱ្យ $f, g\in F(\mathbb{Z})$ កំណត់ដោយ៖

$$f(n)=\begin{cases} n+2 & \text{បើ } n \text{ គូ} \\ 2n+1 & \text{បើ } n \text{ សេស} \end{cases} \quad \text{និង} \quad g(n)=\begin{cases} 2n & \text{បើ } n \text{ គូ} \\ \dfrac{n+1}{2} & \text{បើ } n \text{ សេស} \end{cases} \text{ ។}$$

ចូររក $(g\circ f)(n)$ និង $(f\circ g)(n)$ ។

១៦- គេឱ្យអនុគមន៍ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ កំណត់ដោយ $f(x)=5e^{3x}$ ។

ក. រកដែនកំណត់ និង សំណុំតម្លៃនៃអនុគមន៍ f ។

ខ. បង្ហាញថា f ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយពីដែនកំណត់ទៅសំណុំតម្លៃរបស់វា។

គ. ទាញថា f^{-1} ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយនិងកំណត់វាផង។

ឃ. គណនាសំណុំ $f(A)$ និង $f^{-1}(B)$ ដែល $A=\{-1,0,1\}$ និង $B=\{5,5e^2\}$ ។

ង. ដោះស្រាយសមីការ $f\circ f=5e^5$ ។

១៧- គេឱ្យបីសំណុំ A, B, C និងពីរអនុវត្តន៍ $f: A \to B, g: B \to C$ ។
បង្ហាញថា៖

ក. បើ f និង g ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់ នោះគេបាន $g \circ f$ ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់។

ខ. បើ f និង g ជាអនុវត្តន៍ពេញ នោះ $g \circ f$ ជាអនុវត្តន៍ពេញ។

គ. បើ f និង g ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ នោះ $g \circ f$ ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ និង $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ ។

១៨- គេឱ្យ E ជាសំណុំមួយ និង A ជាផ្នែកមួយនៃ E ។ គេបានអនុវត្តន៍ $f_A : E \to \{0, 1\}$ កំណត់ដោយ $f_A(x) = 1$ បើ $x \in A$ និង $f_A(x) = 0$ បើ $x \notin A$ ហៅថា អនុគមន៍សម្គាល់ផ្នែក A របស់ E ។
បង្ហាញថា បើ $A, B \in \mathscr{P}(E)$ នោះគេបាន៖

ក. $f_{A \cap B} = f_A \times f_B$

ខ. $f_{\overline{A}} = 1 - f_A$

គ. $f_{A \cup B} = f_A + f_B - f_A \times f_B$ ។

១៩- គេឱ្យ $f: E \to F$ ជាអនុវត្តន៍។

ក- បង្ហាញថា $\forall A_1, A_2 \in \mathscr{P}(E) : f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ $\Leftrightarrow$ f ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់។

ខ- បង្ហាញថា $\forall A \in \mathscr{P}(E) : A = f^{-1}[f(A)] \Leftrightarrow$ f ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់។

គ- បង្ហាញថា $\forall B \in \mathscr{P}(F) : B = f[f^{-1}(B)] \Leftrightarrow$ f ជាអនុវត្តន៍ពេញ។

២០- គេឱ្យ $f: E \to F$ ជាអនុវត្តន៍។ បង្ហាញថា $\forall A \in \mathscr{P}(E) : f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ $\Leftrightarrow$ f ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ។

២១- គេឱ្យ $f: E \to F$ ជាអនុវត្តន៍។

ក- បង្ហាញថា $\forall B \in \mathscr{P}(F):\ f^{-1}(F-B)=E-f^{-1}(B)$ ។

ខ- បង្ហាញថា $\forall B \in \mathscr{P}(F):\ f^{-1}(\overline{B})=\overline{f^{-1}(B)}$ ។

២២- គេឱ្យអនុគមន៍ $f: E \to F$ និង $\mathscr{R}$ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុលើសំណុំ E កំណត់ដោយៈ

$$x\ \mathscr{R}\ x' \Leftrightarrow f(x)=f(x')\ ។$$

ក- បង្ហាញថា $\mathscr{R}$ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលលើ E ។

ខ- បើ $E=F=\mathbb{R}$ និង $f(x)=\sin x$ ចូររកថ្នាក់សមមូលនៃធាតុ $b \in \mathbb{R}$ ។

២៣- គេឱ្យអនុគមន៍ $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ កំណត់ដោយ $g(x)=\dfrac{2x+5}{3x-7}$ ។

ក. រកដែនកំណត់ និង សំណុំតម្លៃនៃអនុគមន៍ g ។

ខ. បង្ហាញថា g ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយពីដែនកំណត់ទៅសំណុំតម្លៃរបស់វា។

គ. ទាញថា g^{-1} ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយនិងកំណត់វាផង។

ឃ. ដោះស្រាយសមីការ $g\circ g=2$ ។

២៤- គេឱ្យអនុវត្តន៍ $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ កំណត់ដោយ $f(x)=(-1)^x$ និង $g:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ កំណត់ដោយ $g(x)=2x$ ។ ចូរកំណត់ $g\circ f$, $f\circ g$ និង $\underbrace{g\circ g\circ\ldots\circ g}_{n}$ ។

២៥- គេឱ្យអនុគមន៍ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ និង $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ កំណត់ដោយ $f(x)=x^2,\ g(x)=\sin x$ និង $h(x)=\ln x$ ។

ក. ចូររក $f\circ(g\circ h)$ និង $(f\circ g)\circ h$ ។

ខ. ដោះស្រាយសមីការ $f\circ h=h\circ f$ ។

២៦- បង្ហាញថា បើ $f: E\to F$ ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ នោះគេបាន $f^{-1}\circ f=i_E$ និង $f\circ f^{-1}=i_F$ ។

២៧- គេឱ្យអនុគមន៍ $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ កំណត់ដោយ $g(x) = 2x^2 + 3x - 5$ ។

ក. រកដែនកំណត់ និង សំណុំតម្លៃនៃអនុគមន៍ g ។

ខ. ដោះស្រាយសមីការ $g \circ g = -5$ ។

២៨- គេឱ្យអនុគមន៍ $f : (0\, , +\infty) \to (0\, , +\infty)$ កំណត់ដោយ $f(x) = \ln(x+1) - \ln x$ ។

ក. បង្ហាញថាអនុគមន៍ $f : (0\, , +\infty) \to (0\, , +\infty)$ ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ។

ខ.ទាញថាអនុវត្តន៍ច្រាសនៃ f ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយនិងកំណត់វាផង។

គ. ដោះស្រាយសមីការ $f \circ f = 2$ ។

២៩- គេឱ្យអនុគមន៍ $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ កំណត់ដោយ $h(x) = \sqrt{2x^2 + 3x - 2}$ ។

ក. រកដែនកំណត់ និង រូបភាពនៃអនុគមន៍ h ហើយរក $(h \circ h)(1)$ ។

ខ. ចូរកំណត់ថាតើអនុវត្តន៍ $f : D_h \to h(\mathbb{R})$ កំណត់ដោយ $f(x) = h(x)$ ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយដែរឬទេ។

៣០- គេឱ្យអនុគមន៍ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ កំណត់ដោយ $f(x) = \dfrac{5x+7}{4x+3}$ ។

ក. រកដែនកំណត់ និង សំណុំតម្លៃនៃអនុគមន៍ f ។

ខ. បង្ហាញថា f ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយពីដែនកំណត់ទៅសំណុំតម្លៃរបស់វា។

គ. ទាញថា f^{-1} ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយនិងកំណត់វាផង។

ឃ. ដោះស្រាយសមីការ $f \circ f = 3$ ។

ង. ដោះស្រាយសមីការ $f^{-1} \circ f^{-1} = 3$ ។

ច. គណនាសំណុំ $f(A)$ និង $f^{-1}(B)$ ដែល $A = (0\, , 2]$ និង $B = [2\, , 4]$ ។

៣១- គេឱ្យ $A=\{1,2\}$, $B=\{x,y,z\}$ និង $C=\{a,b\}$។ កំណត់រកអនុវត្តន៍ $f:A\to B$ និង $g:B\to C$ ដើម្បីឱ្យ $g\circ f$ ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ ប៉ុន្តែ g មិនមែនជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់ និង f មិនមែនជាអនុវត្តន៍ពេញទេ។

៣២- គេឱ្យ $f:A\to B$, $g:B\to C$ និង $h:B\to C$ ជាបីអនុវត្តន៍ដែល f ជាអនុវត្តន៍ពេញ និង $g\circ f=h\circ f$ ។ បង្ហាញថា $g=h$ ។

៣៣- គេឱ្យ $f:A\to B$ ជាអនុវត្តន៍ ហើយ X_1 , X_2 , X ជាផ្នែកនៃ A និង Y_1 , Y_2 , Y ជាផ្នែកនៃ B ។ បង្ហាញថា៖

ក. $X_1\subseteq X_2\to f(X_1)\subseteq f(X_2)$

ខ. $f(X_1\cup X_2)=f(X_1)\cup f(X_2)$

គ. $f(X_1\cap X_2)\subseteq f(X_1)\cap f(X_2)$

ឃ. $X\subseteq f^{-1}[f(X)]$

ង. $Y_1\subseteq Y_2\to f^{-1}(Y_1)\subseteq f^{-1}(Y_2)$

ច. $f^{-1}(Y_1\cup Y_2)=f^{-1}(Y_1)\cup f^{-1}(Y_2)$

ឆ. $f^{-1}(Y_1\cap Y_2)=f^{-1}(Y_1)\cap f^{-1}(Y_2)$

ជ. $f[f^{-1}(Y)]\subseteq Y$ ។

៣៤- តាង $M_2(\mathbb{R})$ ជាសំណុំនៃម៉ាទ្រីស 2×2 ទាំងអស់ដែលមានធាតុជាចំនួនពិត។

ក. គេឱ្យអនុវត្តន៍ $f:M_2(\mathbb{R})\to\mathbb{R}^2$ កំណត់ដោយ $f\left(\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}\right)=(ad\ ,\ bc)$ និង $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ កំណត់ដោយ $g(x,y)=x-y$ ។ ចូរកំណត់ $(g\circ f)(A)$ ចំពោះគ្រប់ $A\in M_2(\mathbb{R})$ ។

ខ. គេឱ្យអនុវត្តន៍ $h:M_2(\mathbb{R})\to M_2(\mathbb{R})$ កំណត់ដោយ $h(A)=BA$ ចំពោះគ្រប់ $A\in M_2(\mathbb{R})$ ដែល $B=\begin{bmatrix} -1 & 2\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ ។

១. បង្ហាញថា h ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ។

២. ទាញថា h មានចម្រាសនិងកំណត់ h^{-1} ។

៣៥- តាង $M_3(\mathbb{R})$ ជាសំណុំនៃម៉ាទ្រីស 3×3 ទាំងអស់ដែលមានធាតុជាចំនួនពិត។ គេឱ្យអនុវត្តន៍ $f : M_3(\mathbb{R}) \to M_3(\mathbb{R})$ កំណត់ដោយ $f(A) = BA$ ចំពោះគ្រប់ $A \in M_3(\mathbb{R})$ ដែល $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 7 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ ។

១. បង្ហាញថា f ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ។

២. ទាញថា f មានចម្រាសនិងកំណត់ f^{-1} ។

ជំពូកទី៤

ភាពរាប់បាន និង លំដាប់

(**Cardinality and Order**)

៤.១ សំណុំសមមូល

និយមន័យទី១ គេថាសំណុំ A និង B សមមូលគ្នា កាលណា គេមានអនុវត្តន៍មួយទល់មួយពី A ទៅ B ។ គេកំណត់សរសេរជា

$$A \sim B \Leftrightarrow \exists f \in \mathscr{F}(A, B)$$

ដែល f ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ។[៤៧]

និយមន័យទី២ គេថា A ជាសំណុំរាប់អស់ បើ A ជាសំណុំសមមូលនឹងសំណុំ $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ ដែល $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ ។ ផ្ទុយពីនេះ គេថា A ជាសំណុំអនន្ត (សំណុំអនន្តជាតុ)។[៤៨]

ឧទាហរណ៍ទី១ សំណុំ $A = \{a, b, c\}$ និង $B = \{\text{Jan}, \text{Feb}, \text{Mar}\}$ សមមូលគ្នា ហើយ $A = \{a, b, c\}$ ជាសំណុំរាប់អស់ ពីព្រោះ A សមមូលនឹងសំណុំ $\{1, 2, 3\}$ ។

---

៤៧ https://ia800702.us.archive.org/31/items/SchaumsTheoryProblemsOfGeneralTopology/Lipschutz-GeneralTopology.pdf, p. 32

៤៨ https://ia800702.us.archive.org/31/items/SchaumsTheoryProblemsOfGeneralTopology/Lipschutz-GeneralTopology.pdf, op. cit., p. 32

ឧទាហរណ៍ទី២ បង្ហាញថា សំណុំ $E=\{2, 4, 6,..., 2n,...\}$ និង $\mathbb{N}$ សមមូលគ្នា។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅៈ

យើងពិនិត្យអនុវត្តន៍ $f:\mathbb{N}\to E$

$$x\mapsto f(x)=2x$$

ដោយស្រាយថា វាជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយពី $\mathbb{N}$ ទៅ E។

$-$ចំពោះគ្រប់ $x_1, x_2\in\mathbb{N}$ បើ $f(x_1)=f(x_2)$ នាំឱ្យ $2x_1=2x_2$ នាំឱ្យ $x_1=x_2$ ។

នាំឱ្យ $f:\mathbb{N}\to E$ ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់។

$-$តាង $y=f(x)\in E$ នាំឱ្យ $y=2x$ នាំឱ្យ $x=\dfrac{y}{2}\in\mathbb{N}$ ។

យើងបាន គ្រប់ $y\in E$, $\exists\, x=\dfrac{y}{2}\in\mathbb{N}$ ដែល $y=f(x)$ ។

នាំឱ្យ $f:\mathbb{N}\to E$ ជាអនុវត្តន៍ពេញ។

នាំឱ្យ $f:\mathbb{N}\to E$ ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ។

ដូចនេះ សំណុំ E និង $\mathbb{N}$ សមមូលគ្នា (ពិត)។

ចំពោះសំណុំ E និង $\mathbb{N}$ ទាំងពីរនេះ ជាសំណុំអនន្តជាតុ។

ឧទាហរណ៍ទី៣ បង្ហាញថា សំណុំ $\mathbb{R}\sim(-1, 1)$ ។

ចំពោះឧទាហរណ៍ទី៣នេះ ទុកដូចជាលំហាត់។

បកាសន៍ទី១ ទំនាក់ទំនង $\sim$ ក្នុងបណ្តុំនៃសំណុំកំណត់ដោយ $A\sim B$ ជាទំនាក់ទំនងសមមូល។ [៤៩]

យើងធ្វើការស្រាយបញ្ជាក់នូវបកាសន៍ទី១ដូចខាងក្រោម។

---

[៤៩] https://ia800702.us.archive.org/31/items/SchaumsTheoryProblemsOfGeneralTopology/Lipschutz-GeneralTopology.pdf, op. cit., p. 32

យើងបង្ហាញថា ទំនាក់ទំនង $\sim$ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលក្នុសំណុំសាកល U ។
ទំនាក់ទំនង $\sim$ កំណត់ដោយៈ

$$\forall A, B \subseteq U : A \sim B \Leftrightarrow \exists f \in \mathscr{F}(A,B)$$

ដែល f ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ។

$-$ចំពោះ $\forall A \subseteq U : \exists\, Id_A \in \mathscr{F}(A, A)$

ដែល Id_A ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ។

នាំឱ្យទំនាក់ទំនង $\sim$ មានលក្ខណៈខ្លួនឯងក្នុង U ។

$-$ ចំពោះ $\forall A, B \subseteq U$ បើ $A \sim B \Leftrightarrow \exists f \in \mathscr{F}(A,B)$

ដែល f ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ។

នាំឱ្យ $\exists f^{-1} \in \mathscr{F}(B,A)$ ដែល f^{-1} ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ។ នាំឱ្យ $B \sim A$ ។

នាំឱ្យទំនាក់ទំនង $\sim$ មានលក្ខណៈឆ្លុះក្នុង U ។

$-$ ចំពោះ $\forall A, B, C \subseteq U$ បើ $A \sim B \wedge B \sim C$ យើងបានៈ

$\exists f \in \mathscr{F}(A,B)$, $\exists g \in \mathscr{F}(B,C)$ ដែល f, g ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ។

នាំឱ្យ $\exists g \circ f \in \mathscr{F}(A,C)$ ដែល $g \circ f$ ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ។

នាំឱ្យទំនាក់ទំនង $\sim$ មានលក្ខណៈឆ្លងក្នុង U ។

ដូចនេះ ទំនាក់ទំនង $\sim$ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលក្នុង U (ពិត)។

៤.២ សំណុំរាប់មិនអស់ និង សំណុំរាប់បាន

និយមន័យទី៣ [៥០]

- គេថាសំណុំ A ជាសំណុំរាប់មិនអស់ (Denumerable) កាលណា A សមមូលនឹងសំណុំ $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ ។ កាឌីណាល់នៃសំណុំ A នេះតាងដោយ

[៥០] https://ia800702.us.archive.org/31/items/SchaumsTheoryProblemsOfGeneralTopology/Lipschutz-GeneralTopology.pdf, op. cit., p. 32

$\mathcal{N}_0$ (អានថា aleph null)។

- គេថាសំណុំ A ជាសំណុំរាប់បាន (Countable) កាលណា A ជាសំណុំរាប់អស់ ឬ ជាសំណុំរាប់មិនអស់។

ឧទាហរណ៍ទី៤ សំណុំ $A=\{3, 4, 5,..., 2017\}$ ជាសំណុំរាប់អស់។

ឧទាហរណ៍ទី៥ បង្ហាញថា សំណុំ $\mathbb{N}$ និង $M=\{0, 1, 2,...\}$ ជាសំណុំរាប់មិនអស់។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅៈ

យើងពិនិត្យអនុវត្តន៍ $\mathrm{Id}_{\mathbb{N}}:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$

$$x\mapsto \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}(x)=x$$

ដោយ គ្រប់ $y\in\mathbb{N}$, $\exists!\, x=y\in\mathbb{N}$ ដែល $y=\mathrm{Id}_{\mathbb{N}}(x)$ ។

នាំឱ្យ វាជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយពី $\mathbb{N}$ ទៅ $\mathbb{N}$ ។ នាំឱ្យ $\mathbb{N}\sim\mathbb{N}$ ។

ដូចនេះ សំណុំ $\mathbb{N}$ ជាសំណុំរាប់មិនអស់ (ពិត)។

ម្យ៉ាងទៀត ដោយ $M=\{0, 1, 2,...\}=\{0\}\cup\mathbb{N}$

នាំឱ្យ M ជាសំណុំរាប់មិនអស់ (ពិត)។

ឧទាហរណ៍ទី៦ សំណុំនៃតួរបស់ស្វ៊ីតអនន្តជាតុ a_1 , a_2 , a_3 ,... ដែលតួវាខុសៗគ្នា ជាសំណុំរាប់មិនអស់។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅៈ

យើងកំណត់អនុវត្តន៍ $f:\mathbb{N}\to F$

$$n\mapsto f(n)=a_n$$

ដែល F ជាសំណុំនៃតួរបស់ស្វ៊ីតអនន្តជាតុ a_1 , a_2 , a_3 ,... ដែលតួវាខុសៗគ្នា។ យើងនឹងស្រាយថា វាជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយពី $\mathbb{N}$ ទៅ F។

$-$ចំពោះគ្រប់ $n_1, n_2\in\mathbb{N}$ បើ $n_1\neq n_2$ នាំឱ្យ $a_{n_1}\neq a_{n_2}$ (ពីព្រោះតួរបស់ស្វ៊ីតខុសៗគ្នា)។

នាំឱ្យ $f(n_1) \neq f(n_2)$ ។
នាំឱ្យ $f:\mathbb{N} \to F$ ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់។
– ម្យ៉ាងទៀត យើងមាន គ្រប់ $a_n \in F$, $\exists\, n \in \mathbb{N}$ ដែល $f(n) = a_n$ ។
នាំឱ្យ $f:\mathbb{N} \to F$ ជាអនុវត្តន៍ពេញ។
នាំឱ្យ $f:\mathbb{N} \to F$ ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ។
នាំឱ្យ សំណុំ F និង $\mathbb{N}$ សមមូលគ្នា។
ដូចនេះ សំណុំ F ជាសំណុំរាប់មិនអស់ (ពិត)។

ឧទាហរណ៍ទី៧ បង្ហាញថា សំណុំ $\mathbb{Z}$ ជាសំណុំរាប់មិនអស់។
ចំពោះឧទាហរណ៍ទី៧នេះ ទុកដូចជាលំហាត់។

ជាទូទៅ គ្រប់សំណុំរងនៃ $\mathbb{R}$ និង $\mathbb{R}$ ខ្លួនឯង ជាសំណុំរាប់មិនបាន។

ទ្រឹស្តីបទទី១ គ្រប់សំណុំអនន្តជាតុ (infinite set) មានសំណុំរងរាប់មិនអស់មួយ។ [៥១]

យើងធ្វើការស្រាយបញ្ជាក់នូវទ្រឹស្តីបទទី១ដូចខាងក្រោម។
តាង X ជាសំណុំអនន្តជាតុ និងតាង $f:2^X \to X$ ជាអនុវត្តន៍ជម្រើស មានន័យថា គ្រប់សំណុំរងមិនទទេ A នៃ X គេបាន $f(A) \in A$ ។ គេពិនិត្យស្វ៊ីត
$a_1 = f(X)$, $a_2 = f(X - \{a_1\})$, $a_3 = f(X - \{a_1, a_2\})$,...,
$a_n = f(X - \{a_1, a_2, ..., a_{n-1}\})$,... ។
ដោយ X ជាសំណុំអនន្តជាតុ នោះ $X - \{a_1, a_2, ..., a_{n-1}\} \neq \varnothing$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ។
ជាងនេះដោយ f ជាអនុវត្តន៍ជម្រើស នាំឱ្យ $a_n \neq a_i$ ចំពោះ $i < n$ ។ មានន័យថា a_n ជាតួនៃ ស្វ៊ីតខុសៗគ្នា។
ដូចនេះ សំណុំ $D = \{a_1, a_2, ...\}$ ជាសំណុំរងរាប់មិនអស់នៃ X (ពិត)។

---

[៥១] https://ia800702.us.archive.org/31/items/SchaumsTheoryProblemsOfGeneralTopology/Lipschutz-GeneralTopology.pdf, op. cit., p. 33

ទ្រឹស្តីបទទី២ គ្រប់សំណុំរងនៃសំណុំរាប់បាន ជាសំណុំរាប់បាន។

បទគន្លឹះ បើ $\{A_1, A_2, ...\}$ ជាថ្នាក់ដាច់គ្នារាប់មិនអស់នៃសំណុំរាប់មិនអស់ នោះគេបាន $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i$ ជាសំណុំរាប់មិនអស់។

ទ្រឹស្តីបទទី៣ បើ $\{A_i : i \in I\}$ ជាថ្នាក់រាប់បាន (គ្រួសាររាប់បាន) នៃសំណុំរាប់បាន មានន័យថា I ជាសំណុំរាប់បាន និង A_i ជាសំណុំរាប់បានចំពោះ $i \in I$ នីមួយៗ នោះគេបាន $\bigcup\{A_i : i \in I\} = \bigcup_{i \in I} A_i$ ជាសំណុំរាប់បាន។

ចំពោះទ្រឹស្តីបទទី២ បទគន្លឹះ និង ទ្រឹស្តីបទទី៣នេះ ទុកដូចជាលំហាត់។

៤.៣ សំណុំជាប់ និង កាឌីណាល់

និយមន័យទី៤ គេថា X ជាសំណុំរងនៃសំណុំជាប់ (Continuum) ដែលគេកំណត់តាងកាឌីណាល់របស់វាដោយ c កាលណា X សមមូលនឹង $[0, 1]$។ [៥២]

បកាសន៍ទី២ សំណុំ $\mathbb{R}$ មានកាឌីណាល់ c ។ [៥៣]

ចំពោះបកាសន៍ទី២នេះ ទុកដូចជាលំហាត់។

ឧទាហរណ៍ទី៨ បង្ហាញថា ចន្លោះ $(0, 1)$ មានកាឌីណាល់ c ។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖

ចន្លោះ $(0, 1)$ មានកាឌីណាល់ c មានន័យថា វាសមមូលនឹង $[0,1]$ ។

---

[៥២] https://ia800702.us.archive.org/31/items/SchaumsTheoryProblemsOfGeneralTopology/Lipschutz-GeneralTopology.pdf, op. cit., p. 33

[៥៣] Ibid., p. 33

យើងមាន $[0\,,1]=\{0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},...\}\cup A$ និង $(0\,,1)=\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},...\}\cup A$
ដែល $A=[0\,,1]-\{0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},...\}=(0\,,1)-\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},...\}$ ។
យើងកំណត់អនុវត្តន៍ $f:[0,1]\to(0,1)$

$$x\mapsto f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\ ,\ x=0\\ \frac{1}{n+2},\ x=\frac{1}{n}\ ,n\in\mathbb{N}\\ x,\quad x\neq 0,\frac{1}{n}\ ,n\in\mathbb{N}\Leftrightarrow x\in A\end{cases}$$

វាជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយពី $[0,1]$ ទៅ $(0,1)$ ។
នាំឱ្យ សំណុំ $[0,1]$ និង $(0,1)$ សមមូលគ្នា។
ដូចនេះ ចន្លោះ $(0\,,1)$ មានកាឌីណាល់ c (ពិត)។
យើងឃើញថា សំណុំជាប់ គឺគ្រប់ចន្លោះនៃសំណុំចំនួនពិត $\mathbb{R}$ ។

និយមន័យទី៥ យើងសរសេរ $A\underset{\sim}{\prec}B$ បើ A សមមូលនឹងសំណុំរងនៃ B មានន័យថា

$$A\underset{\sim}{\prec}B\ \Leftrightarrow\ \exists B^*\subseteq B$$

ដែល $A\sim B^*$ ។
យើងសរសេរ $A\prec B$ បើ $A\underset{\sim}{\prec}B$ ប៉ុន្តែ $A\nsim B$ (មានន័យថា A មិនសមមូលនឹង B ទេ)។[៥៤]

ឧទាហរណ៍ទី៩ បង្ហាញថា $\mathbb{N}\prec\mathbb{R}$ ។
យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖
ដោយសំណុំ $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{R}$ នាំឱ្យ $\mathbb{N}\underset{\sim}{\prec}\mathbb{R}$ ប៉ុន្តែ $\mathbb{R}$ ជាសំណុំជាប់ នាំឱ្យវាមិនមែនជា

[៥៤] https://ia800702.us.archive.org/31/items/SchaumsTheoryProblemsOfGeneralTopology/Lipschutz-GeneralTopology.pdf, op. cit., p. 33

សំណុំរាប់មិនអស់ មានន័យថា $\mathbb{R} \nsim \mathbb{N}$ ។ ដូចនេះ $\mathbb{N} \prec \mathbb{R}$ (ពិត)។

ទ្រឹស្តីបទទី៤ (**ទ្រឹស្តីបទ** Schroeder-Bernstein)

បើ $A \precsim B$ និង $B \precsim A$ នោះគេបាន $A \sim B$ ។

ចំពោះទ្រឹស្តីបទទី៤នេះ ទុកដូចជាលំហាត់។

និយមន័យទី៦ បើសំណុំ A សមមូលនឹងសំណុំ B មានន័យថា $A \sim B$ នោះយើងនិយាយថា A និង B មានកាឌីណាល់ដូចគ្នា។ យើងសរសេរ

$$n(A) = n(B) \Leftrightarrow A \sim B \text{ ។}$$

ម្យ៉ាងទៀត បើ $A \prec B$ នោះយើងនិយាយថា A មានកាឌីណាល់តូចជាង B ឬ B មានកាឌីណាល់ធំជាង A គឺថា $n(A) < n(B) \Leftrightarrow A \prec B$ ។[៥៥]

យើងទាញបាន

$$n(A) \le n(B) \Leftrightarrow A \precsim B \text{ ។}$$

ឧទាហរណ៍ទី១០ ចូរប្រៀបធៀបកាឌីណាល់នៃសំណុំ $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$, ... និង $\mathbb{N}$, $[0 , 1]$ ។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖

សំណុំ $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$, ... និង $\mathbb{N}$, $[0 , 1]$ មានកាឌីណាល់ $0 , 1 , 2 , 3 ,...$ និង $\aleph_0$, c រៀងគ្នា។ យើងអាចសរសេរ $0 < 1 < 2 < 3 < ... < \aleph_0 < c$ ។

ទ្រឹស្តីបទទី៥

បើ $n(A) \le n(B)$ និង $n(B) \le n(A)$ នោះគេបាន $n(A) = n(B)$ ។

---

៥៥ https://ia800702.us.archive.org/31/items/SchaumsTheoryProblemsOfGeneralTopology/Lipschutz-GeneralTopology.pdf, op. cit., p. 34

យើងធ្វើការស្រាយបញ្ជាក់នូវទ្រឹស្តីបទទី៥ដូចខាងក្រោម។
ដោយ $n(A) \le n(B)$ និង $n(B) \le n(A)$ សមមូល $A \underset{\sim}{\prec} B$ និង $B \underset{\sim}{\prec} A$ នោះ
តាមទ្រឹស្តីបទទី៤ យើងបាន $A \sim B$ នោះតាមនិយមន័យនាំឱ្យ $n(A) = n(B)$
(ពិត)។

៤.៤ ទំនាក់ទំនងលំដាប់

និយមន័យទី៧ ទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ $\mathscr{R}$ កំណត់លើសំណុំ A ជាទំនាក់ទំនងលំដាប់ដោយផ្នែក (ឬ ទំនាក់ទំនងលំដាប់) លុះត្រាតែ $\mathscr{R}$ មានលក្ខណៈខ្លួនឯង លក្ខណៈឆ្លុះស្មើ និង លក្ខណៈឆ្លង។[៥៦]

ក្នុងករណី $\mathscr{R}$ ជាទំនាក់ទំនងលំដាប់លើសំណុំ A គេជំនួសការសរសេរ $x \mathscr{R} y$ ដោយ $x \prec y$ ។[៥៧]

សំណុំ A ដែលភ្ជាប់នឹងទំនាក់ទំនងលំដាប់ $\mathscr{R}$ មួយ ហៅថា សំណុំរៀបរយដោយទំនាក់ទំនងនោះ (ឬ សំណុំរៀបរយដោយផ្នែក) ហើយគេសរសេរវាជា $(A, \prec)$។

ឧទាហរណ៍ទី១១ ទំនាក់ទំនង $\le$ ជាទំនាក់ទំនងលំដាប់លើសំណុំ $\mathbb{N}$ ។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖
– ចំពោះ $\forall a \in \mathbb{N}$ នាំឱ្យ $a \le a$ ។
នាំឱ្យទំនាក់ទំនង $\le$ មានលក្ខណៈខ្លួនឯងលើ $\mathbb{N}$ ។
– ចំពោះ $\forall a, b \in \mathbb{N}$ បើ $a \le b$ និង $b \le a$ នាំឱ្យ $a = b$ ។
នាំឱ្យទំនាក់ទំនង $\le$ មានលក្ខណៈឆ្លុះស្មើលើ $\mathbb{N}$ ។

---

[៥៦] https://ia800702.us.archive.org/31/items/SchaumsTheoryProblemsOfGeneralTopology/Lipschutz-GeneralTopology.pdf, op. cit., p. 34

[៥៧] គណៈកម្មាធិការជាតិអចិន្ត្រៃយ៍នៃខេមរយានកម្មសិក្សា -ដ.ឯ.ម- ទំព័រ១៦

– ចំពោះ $\forall a, b, c \in \mathbb{N}$ បើ $a \le b$ និង $b \le c$ នាំឱ្យ $a \le c$ ។
នាំឱ្យទំនាក់ទំនង $\le$ មានលក្ខណៈឆ្លងលើ $\mathbb{N}$ ។
ដូចនេះ ទំនាក់ទំនង $\le$ ជាទំនាក់ទំនងលំដាប់លើសំណុំ $\mathbb{N}$ (ពិត)។

ឧទាហរណ៍ទី១២ បង្ហាញថា សំណុំ $\mathbb{N}$ ជាសំណុំរៀបរយដោយទំនាក់ទំនង $|$។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖
ទំនាក់ទំនង $|$ កំណត់ដោយ៖

$\forall a, b \in \mathbb{N} : a|b$ សមមូល $\exists k \in \mathbb{N} : b = ak$ ។ យើងនឹងស្រាយថា វាជាទំនាក់ទំនងលំដាប់លើសំណុំ $\mathbb{N}$ ។

– ចំពោះ $\forall a \in \mathbb{N}$ នាំឱ្យ $a = a \cdot 1$ ដែល $k = 1 \in \mathbb{N}$ ។ នាំឱ្យ $a|a$ ។
នាំឱ្យទំនាក់ទំនង $|$ មានលក្ខណៈខ្លួនឯងលើ $\mathbb{N}$ ។
– ចំពោះ $\forall a, b \in \mathbb{N}$ បើ $a|b$ និង $b|a$ យើងបាន
$\exists k_1, k_2 \in \mathbb{N} : b = ak_1 \wedge a = bk_2$ ។
នាំឱ្យ $a = bk_2 = (ak_1)k_2 = a(k_1k_2)$ ។
នាំឱ្យ $k_1k_2 = 1$ ពីព្រោះ $a \in \mathbb{N}$ ។
ដោយ $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ នាំឱ្យ $k_1 = k_2 = 1$ ។ នាំឱ្យ $a = b$ ។
នាំឱ្យទំនាក់ទំនង $|$ មានលក្ខណៈឆ្លុះស្មើលើ $\mathbb{N}$ ។
– ចំពោះ $\forall a, b, c \in \mathbb{N}$ បើ $a|b$ និង $b|c$ យើងបាន
$\exists k_3, k_4 \in \mathbb{N} : b = ak_3 \wedge c = bk_4$ ។
នាំឱ្យ $c = bk_4 = (ak_3)k_4 = a(k_3k_4) = ak$ ដែល $k = k_3k_4 \in \mathbb{N}$ ។ នាំឱ្យ $a|c$ ។
នាំឱ្យទំនាក់ទំនង $|$ មានលក្ខណៈឆ្លងលើ $\mathbb{N}$ ។
នាំឱ្យវាជាទំនាក់ទំនងលំដាប់លើសំណុំ $\mathbb{N}$ ។
ដូចនេះ $\mathbb{N}$ ជាសំណុំរៀបរយដោយទំនាក់ទំនង $|$ (ពិត)។

លំហាត់ភាឌីណាល់ និង លំដាប់

១- បង្ហាញថា ទំនាក់ទំនង $\leq$ ជាទំនាក់ទំនងលំដាប់លើសំណុំ $\mathbb{Z}$ ។

២- បង្ហាញថា ទំនាក់ទំនង $\leq$ ជាទំនាក់ទំនងលំដាប់លើសំណុំ $\mathbb{R}$ ។

៣- បង្ហាញថា សំណុំ $\mathbb{N}^2$ ជាសំណុំរាប់មិនអស់។

៤- តាងសំណុំ $M=\{0\,,1\,,2\,,3\,,...\}$ ។ បង្ហាញថា សំណុំ M^2 ជាសំណុំរាប់មិនអស់។

៥- បង្ហាញថា សំណុំ $\mathbb{Q}$ ជាសំណុំរាប់មិនអស់។

៦- បង្ហាញថា ចន្លោះ $[0\,,1)$ មានកាឌីណាល់ c ។

៧- បង្ហាញថា ចន្លោះ $(0\,,1]$ មានកាឌីណាល់ c ។

៨- គេឱ្យ $a<b$ ។ បង្ហាញថា ចន្លោះ $[a\,,b]$ មានកាឌីណាល់ c ។

៩- គេឱ្យ $a<b$ ។ បង្ហាញថា ចន្លោះ $(a\,,b)$ មានកាឌីណាល់ c ។

១០- គេឱ្យ $a<b$ ។ បង្ហាញថា ចន្លោះ $[a\,,b)$ មានកាឌីណាល់ c ។

១១- គេឱ្យ $a<b$ ។ បង្ហាញថា ចន្លោះ $(a\,,b]$ មានកាឌីណាល់ c ។

១២- បង្ហាញថា សំណុំ $\mathbb{Q}$ ជាសំណុំរៀបរយដោយទំនាក់ទំនង $\leq$ ។

១៣- បង្ហាញថា សំណុំ $\mathscr{P}(U)$ ជាសំណុំរៀបរយដោយទំនាក់ទំនង $\subseteq$ ។

១៤- គេឱ្យ $\mathscr{R}$ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុលើ $\mathbb{R}^2$ កំណត់ដោយៈ

$\forall(x_1,x_2)\,,(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$:

$(x_1,x_2)\ \mathscr{R}\ (y_1,y_2)\ \Leftrightarrow\ (x_1\leq y_1 \wedge x_2\leq y_2)$ ។

បង្ហាញថា $\mathscr{R}$ ជាទំនាក់ទំនងលំដាប់លើ $\mathbb{R}^2$ ។

១៥- គេឱ្យ $\mathscr{R}$ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុលើ $\mathbb{R}$ កំណត់ដោយៈ

$\forall x\,,\,y\in\mathbb{R}:\ x\ \mathscr{R}\ y\ \Leftrightarrow\ (|x|<|y|)\vee(|x|=|y|\wedge x\le y)$ ។

បង្ហាញថា $\mathbb{R}$ ជាសំណុំរៀបរយដោយទំនាក់ទំនង $\mathscr{R}$ ។

១៦- បង្ហាញថា បើ $X\supseteq Y\supseteq X_1$ និង $X\sim X_1$ នោះគេបាន $X\sim Y$ ។

១៧- បង្ហាញថា ទំនាក់ទំនង $\underset{\sim}{\prec}$ ជាទំនាក់ទំនងលំដាប់លើ U ។

១៨- បង្ហាញថា គ្រប់សំណុំអនន្តធាតុសមមូលនឹងសំណុំរងផ្ទាល់មួយនៃខ្លួនវា។

១៩- បង្ហាញថា បើ A និង B ជាសំណុំរាប់មិនអស់ នោះគេបាន $A\times B$ ជាសំណុំរាប់មិនអស់។

២០- បង្ហាញថា សំណុំចំណុចក្នុងប្លង់ $\mathbb{R}^2$ ដែលមានកូអ័រដោណេជាចំនួនសនិទាន គឺជាសំណុំរាប់មិនអស់។

ជំពូកទី៥

តូប៉ូវិទ្យាក្នុង $\mathbb{R}$

(**Topology in** $\mathbb{R}$)

៥.១ សំណុំបើកក្នុង $\mathbb{R}$

និយមន័យទី១ (**ចំណុចក្នុង** Interior Point) គេមាន A ជាសំណុំរងមួយនៃ $\mathbb{R}$ និង $p \in A$ ។ គេថា p ជាចំណុចក្នុងនៃ A កាលណាមាន S_p ជាចន្លោះបើកដែលមាន p ហើយ $S_p \subseteq A$ ។ មានន័យថា p ជាចំណុចក្នុងនៃ A សមមូល $\exists S_p : S_p \subseteq A$ ។[៥៨]

គេកំណត់តាងសំណុំចំណុចក្នុងនៃ A ដោយ $\mathrm{int}(A)$ ឬ $\mathring{A}$ ។
បើ p មិនមែនជាចំណុចក្នុងនៃ A សមមូល $\forall S_p : S_p \not\subset A$ ។

ឧទាហរណ៍ទី១ គេឱ្យ $A = [a\ ,\ b]$ ជាសំណុំរងមួយនៃ $\mathbb{R}$ ។ ចូររកសំណុំចំណុចក្នុងនៃ A ។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖
ចំពោះ $p = a$ មិនមែនជាចំណុចក្នុងនៃ A ទេ ពីព្រោះ
$\forall \varepsilon > 0, \forall\ S_a = (a - \varepsilon, a + \varepsilon) : S_a \not\subset A$ ។

---

[៥៨] https://ia800702.us.archive.org/31/items/SchaumsTheoryProblemsOfGeneralTopology/Lipschutz-GeneralTopology.pdf, op. cit., p. 47

ចំពោះ $p=b$ មិនមែនជាចំណុចក្នុងនៃ A ទេ ពីព្រោះ
$\forall \varepsilon>0,\ \forall\, S_b=(b-\varepsilon,\ b+\varepsilon) : S_b \not\subset A$ ។

ចំពោះ $\forall p\in(a,b)$ ជាចំណុចក្នុងនៃ A ពីព្រោះ $\exists\, S_p=(a,b) : S_p\subseteq A$ ។

ដូចនេះ សំណុំចំណុចក្នុងនៃ A គឺ $\mathrm{int}(A)=(a,b)$ ។

ឧទាហរណ៍ទី២ គេឱ្យ $A=\{p\}$ ជាសំណុំរងមួយនៃ $\mathbb{R}$ ។ តើ p ជាចំណុចក្នុងនៃ A ដែរឬទេ? ពីព្រោះអ្វី?
ចំពោះឧទាហរណ៍ទី២នេះ ទុកដូចជាលំហាត់។

និយមន័យទី២ គេថា សំណុំរង A នៃ $\mathbb{R}$ ជាសំណុំបើក (Open set) កាលណាគ្រប់ធាតុនៃ A សុទ្ធតែជាចំណុចក្នុងនៃ A ហើយ A មិនមែនជាសំណុំបើក កាលណាមានធាតុនៃ A ដែលមិនមែនជាចំណុចក្នុងនៃ A ។[៥៩]
យើងបាន

$$A \text{ ជាសំណុំបើក សមមូល } \forall p\in A\Rightarrow p\in \overset{\circ}{A}$$

និង $$A \text{ មិនមែនជាសំណុំបើក សមមូល } \exists p\in A\wedge p\notin \overset{\circ}{A}$$ ។

និយមន័យទី៣ គេថា សំណុំរង A នៃ $\mathbb{R}$ ជាសំណុំបើក កាលណាចំពោះ $\forall x\in A,\ \exists\, a,b\in\mathbb{R}\ (a<b)$ ដែល $x\in(a,b)\subseteq A$ ។[៦០]

ឧទាហរណ៍ទី៣ សំណុំ $A=(a,b)$ ជាសំណុំបើក។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖
សំណុំ $A=(a,b)$ ជាសំណុំបើក ដោយសារចំពោះ $\forall p\in(a,b)$ ជាចំណុច

---

៥៩ https://ia800702.us.archive.org/31/items/SchaumsTheoryProblemsOfGeneralTopology/Lipschutz-GeneralTopology.pdf, op. cit., p. 47

៦០ http://www.topologywithouttears.net/topbook.pdf, p. 36

ក្នុងនៃ A ពីព្រោះ $\exists\, S_p = (a, b) : S_p \subseteq A$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៤ សំណុំ $B = (a\ ,\ b]$ មិនមែនជាសំណុំបើកទេ។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖

សំណុំ $B = (a\ ,\ b]$ មិនមែនជាសំណុំបើកទេ ដោយសារ $b \in B$ តែ b មិនមែនជាចំណុចក្នុងនៃ B ទេ ពីព្រោះ $\forall \varepsilon > 0, \forall\, S_b = (b - \varepsilon, b + \varepsilon) : S_b \not\subset B$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៥ សំណុំ $\mathbb{R}$ និង $\varnothing$ ជាសំណុំបើក។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖

សំណុំ $\mathbb{R}$ ជាសំណុំបើក ពីព្រោះ $\forall p \in \mathbb{R}$,

$\exists\, \varepsilon > 0, \exists\, S_p = (p - \varepsilon, p + \varepsilon) : S_p \subseteq \mathbb{R}$

និង $\varnothing$ ជាសំណុំបើកដែរ ពីព្រោះគ្មានធាតុ (ចំណុច) ណាមួយនៃ $\varnothing$ ដែលមិនមែនជាចំណុចក្នុងនៃ $\varnothing$ ទេ។

ឧទាហរណ៍ទី៦ សំណុំ $C = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ , \frac{1}{n}, ...\}$ មិនមែនជាសំណុំបើកទេ។

ចំពោះឧទាហរណ៍ទី៦នេះ ទុកដូចជាលំហាត់។

ទ្រឹស្តីបទទី១ ប្រជុំរាប់បាននៃសំណុំបើកក្នុង $\mathbb{R}$ ជាសំណុំបើក។ [៦១]

យើងមានសម្រាយបញ្ជាក់ដូចតទៅ៖

តាង $\{A_i : i \in I$, I ជាសំណុំរាប់បាន$\}$ ជាគ្រួសាររាប់បាននៃសំណុំបើកក្នុង $\mathbb{R}$ ។

យើងនឹងបង្ហាញថា $\bigcup_{i \in I} A_i$ ជាសំណុំបើក។

ចំពោះគ្រប់ $p \in \bigcup_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \exists\, i_0 \in I, p \in A_{i_0}$ តែ A_{i_0} ជាសំណុំបើក

[៦១] https://ia800702.us.archive.org/31/items/SchaumsTheoryProblemsOfGeneralTopology/Lipschutz-GeneralTopology.pdf, op. cit., p. 48

នាំឱ្យ p ជាចំណុចក្នុងនៃ A_{i_0} ។

នាំឱ្យ $\exists S_p \subseteq A_{i_0}$ នាំឱ្យ $\exists S_p \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$ ។

នាំឱ្យ p ជាចំណុចក្នុងនៃ $\bigcup_{i\in I} A_i$ ។

ដូចនេះ $\bigcup_{i\in I} A_i$ ជាសំណុំបើក។

ទ្រឹស្តីបទទី២ ប្រសព្វរាប់អស់នៃសំណុំបើកក្នុង $\mathbb{R}$ ជាសំណុំបើក។
ចំពោះទ្រឹស្តីបទទី២នេះ ទុកដូចជាលំហាត់។

ឧទាហរណ៍ទី៧ ក្នុង $\mathbb{R}$ យើងមានគ្រួសាររាប់មិនអស់នៃសំណុំបើក $\{A_i : i \in \mathbb{N}\}$ ដែល $A_n = \left(-\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right), n \in \mathbb{N}$ ។ បង្ហាញថា $\bigcap_{i=1}^{m} A_i$ ជាសំណុំបើក និង

$\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i$ មិនមែនជាសំណុំបើកទេ។

ចំពោះឧទាហរណ៍ទី៧នេះ ទុកដូចជាលំហាត់។

៥.២ ចំណុចអាគុយ

និយមន័យទី៤ គេមាន A ជាសំណុំរងនៃ $\mathbb{R}$ និង $p \in A$ ។ គេថា p ជាចំណុចអាគុយនៃ A (ឬ ចំណុចលីមីតនៃ A) កាលណា គ្រប់ចន្លោះបើក S_p ដែលមាន p មានធាតុមួយនៃ A ផ្សេងពី p មានន័យថា

$$\forall S_p , (S_p \cap A) \setminus \{p\} \neq \varnothing \text{ ។}$$

សំណុំចំណុចអាគុយនៃ A ហៅថា សំណុំដេរីវេ (Derived set) ឬសំណុំលីមីត

នៃ A តាងដោយ A' ។ [៦២]

បើ p មិនមែនជាចំណុចអាគុយនៃ A សមមូល $\exists S_p$, $(S_p \cap A)\setminus\{p\}=\varnothing$

សមមូល $\exists S_p$, $S_p \cap A=\{p\}$ ឬ $S_p \cap A=\varnothing$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៨ គេមាន $A=\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ , \frac{1}{n},...\}$ ជាសំណុំរងនៃ $\mathbb{R}$ ។ រក A' ។

យើងមានដំណោះស្រាយរក A' ដូចតទៅ៖

$-$បើ $p\in A$ នាំឱ្យ $\exists n_0 \in \mathbb{N}, p=\dfrac{1}{n_0}$

នាំឱ្យ $\dfrac{1}{n_0+1}<p<\dfrac{1}{n_0-1} \Rightarrow S_p=\left(\dfrac{1}{n_0+1} , \dfrac{1}{n_0-1}\right)$

នាំឱ្យ $S_p \cap \left(A \setminus \left\{\dfrac{1}{n_0}\right\}\right)=\varnothing \Rightarrow p\notin A'$ ។

$-$បើ $p<0$ នាំឱ្យ $\exists\, S_p=(p-1 , 0), S_p \cap A=\varnothing$ នាំឱ្យ $p\notin A'$ ។

$-$បើ $p>1$ នាំឱ្យ $\exists\, S_p=(1 , p+1), S_p \cap A=\varnothing$ នាំឱ្យ $p\notin A'$ ។

$-$បើ $p\notin A, p\in(0, 1)$ នាំឱ្យ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$,

$\dfrac{1}{n_0+1}<p<\dfrac{1}{n_0} \Rightarrow \exists\, S_p=\left(\dfrac{1}{n_0+1} , \dfrac{1}{n_0}\right)$

នាំឱ្យ $S_p \cap A=\varnothing \Rightarrow p\notin A'$ ។

$-$បើ $p=0$ នាំឱ្យ $\forall\varepsilon>0, \exists m\in\mathbb{N}, 0<\dfrac{1}{m}<\varepsilon \Rightarrow m>\dfrac{1}{\varepsilon}$ គឺយក

---

៦២ https://ia800702.us.archive.org/31/items/SchaumsTheoryProblemsOfGeneralTopology/Lipschutz-GeneralTopology.pdf, op. cit., p. 48

$\mathrm{m}=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$ ។ នាំឱ្យ $\forall \varepsilon>0,\ \exists\ \mathrm{m}=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1\in\mathbb{N},\ \dfrac{1}{\mathrm{m}}\in \mathrm{S_p}=(-\varepsilon,\ \varepsilon)$

នាំឱ្យ $(\mathrm{S_p}\cap \mathrm{A})\setminus\{0\}\neq\varnothing\Rightarrow 0\in \mathrm{A}'$។ ដូចនេះ $\mathrm{A}'=\{0\}$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៩ បង្ហាញថា បើសំណុំ $\mathrm{A}=(\mathrm{a}\ ,\ \mathrm{b})$ នោះគេបាន $\mathrm{A}'=[\mathrm{a}\ ,\ \mathrm{b}]$ ។

ឧទាហរណ៍ទី១០ គេមាន $\mathrm{B}=\mathbb{N}$ ចូរកំណត់រក B' ។

ចំពោះឧទាហរណ៍ទី៩និងទី១០នេះ ទុកដូចជាលំហាត់។

ទ្រឹស្ដីបទទី៣ (**ទ្រឹស្ដីបទ** Bolzano - Weierstrass) គេឱ្យ A ជាសំណុំអនន្តនិងទាល់នៃចំនួនពិត។ នោះគេបាន A ផ្ទុកចំណុចអាគុយមួយយ៉ាងតិច។ [៦៣]

ចំពោះទ្រឹស្ដីបទទី៣នេះ ទុកដូចជាលំហាត់។

៥.៣ សំណុំបិទ

និយមន័យទី៥ គេថាសំណុំរង A នៃ $\mathbb{R}$ ជាសំណុំបិទ កាលណា សំណុំរងបំពេញនៃ A ជាសំណុំបើក។ មានន័យថា A ជាសំណុំបិទ សមមូល $\mathrm{A^c}$ ជាសំណុំបើក។ [៦៤]

ឧទាហរណ៍ទី១១ សំណុំ $\mathrm{A}=[\mathrm{a}\ ,\ \mathrm{b}]$ ជាសំណុំបិទ។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖

សំណុំ $\mathrm{A}=[\mathrm{a}\ ,\ \mathrm{b}]$ ជាសំណុំបិទ ដោយសារ $\mathrm{A^c}=(-\infty,\ \mathrm{a})\cup(\mathrm{b},\ +\infty)$ ជាប្រជុំនៃពីរសំណុំបើក ជាសំណុំបើក។

---

[៦៣] https://ia800702.us.archive.org/31/items/SchaumsTheoryProblemsOfGeneralTopology/Lipschutz-GeneralTopology.pdf, op. cit., p. 48

[៦៤] Ibid., p. 48

ឧទាហរណ៍ទី១២ សំណុំ $B=(a\ ,\ b)$ មិនមែនជាសំណុំបិទ។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖

សំណុំ $B=(a\ ,\ b)$ មិនមែនជាសំណុំបិទ ដោយសារ

$B^c=(-\infty,\ a]\cup[b,\ +\infty)$ មិនមែនជាសំណុំបើកទេ។

ឧទាហរណ៍ទី១៣ សំណុំ $\mathbb{R}$ ជាសំណុំបិទ។

ឧទាហរណ៍ទី១៤ សំណុំ $\varnothing$ ជាសំណុំបិទ។

ចំពោះឧទាហរណ៍ទី១៣និងទី១៤នេះ ទុកដូចជាលំហាត់។

ទ្រឹស្តីបទទី៤ សំណុំរង A នៃ $\mathbb{R}$ ជាសំណុំបិទ លុះត្រាតែ ចំណុចអាគុយនៃ A ជាធាតុនៃ A មានន័យថា A ជាសំណុំបិទ $\Leftrightarrow A'\subseteq A$ ។

ចំពោះទ្រឹស្តីបទទី៤នេះ ទុកដូចជាលំហាត់។

ឧទាហរណ៍ទី១៥ សំណុំ $A=\{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ ,\ \frac{1}{n},...\}$ មិនមែនជាសំណុំបិទ។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖

សំណុំ $A=\{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ ,\ \frac{1}{n},...\}$ មិនមែនជាសំណុំបិទទេ ពីព្រោះ

$A'=\{0\}\not\subset A$ ។

ឧទាហរណ៍ទី១៦ សំណុំ $\mathbb{N}$ ជាសំណុំបិទ។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖

សំណុំ $\mathbb{N}$ ជាសំណុំបិទ ពីព្រោះ $A'=\varnothing\subseteq A=\mathbb{N}$ ។

ទ្រឹស្តីបទទី៥ ប្រជុំរាប់អស់នៃសំណុំបិទក្នុង $\mathbb{R}$ ជាសំណុំបិទ។

យើងមានសម្រាយបញ្ជាក់ដូចតទៅ៖

តាង $\{A_i : i\in I=\{1,\ 2,...,\ n\}\}$ ជាគ្រួសាររាប់អស់នៃសំណុំបិទក្នុង $\mathbb{R}$ ។ យើងនឹងបង្ហាញថា $A=\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ ជាសំណុំបិទ។

ដោយ $\forall i \in I = \{1, 2, ..., n\}$, A_i ជាសំណុំបិទ នាំឱ្យ A_i^c ជាសំណុំបើក និង $\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c$ ជាសំណុំបើក។

តាមរូបមន្ត De Morgan នាំឱ្យ $A^c = \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c$ ជាសំណុំបើក។

ដូចនេះ $A = \left(A^c\right)^c$ ជាសំណុំបិទ។

ទ្រឹស្ដីបទទី៦ ប្រសព្វរាប់បាននៃសំណុំបិទក្នុង $\mathbb{R}$ ជាសំណុំបិទ។
ចំពោះទ្រឹស្ដីបទទី៦នេះ ទុកដូចជាលំហាត់។

៥.៤ ស្វ៊ីត

និយមន័យទី៦ ស្វ៊ីតចំនួន $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ ឬ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ជាអនុវត្តន៍ពី $\mathbb{N}$ ទៅ $\mathbb{R}$ ដែលកំណត់សរសេរដោយ៖

$$\langle a_n \rangle : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \mapsto a_n$$

ក្នុងនេះ a_n ជាតួទូទៅឬជាតួទី n នៃស្វ៊ីត $\langle a_n \rangle$ និង $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ ជាសំណុំតម្លៃនៃស្វ៊ីតនេះ។ [៦៥]

ឧទាហរណ៍ទី១៧ តួ $a_n = 2n^2 - 3n$ ជាតួទូទៅឬជាតួទី n នៃស្វ៊ីត $\langle a_n \rangle$។

និយមន័យទី៧ គេថាស្វ៊ីត $\langle a_n \rangle$ ជាស្វ៊ីតរួមរក $\ell \in \mathbb{R}$ ដែលគេកំណត់សរសេរដោយ $\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell$ កាលណា

---

៦៥ https://ia800702.us.archive.org/31/items/SchaumsTheoryProblemsOfGeneralTopology/Lipschutz-GeneralTopology.pdf, op. cit., p. 49

$\forall \varepsilon > 0 , \exists n_0 \in \mathbb{N} , \forall n \ge n_0 \Rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon$ ។ [៦៦]

ដោយ $|a_n - \ell| < \varepsilon \Leftrightarrow a_n \in (\ell - \varepsilon , \ell + \varepsilon)$

ដូច្នេះ $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \ell$ លុះត្រាតែ ចន្លោះបើក S_ℓ ដែលមាន ℓ មានតួនៃស្ទីតជាអនន្ត ($n \ge n_0$) លើកលែងតែមួយចំនួនរាប់អស់ ($\{1 , 2 , 3 ,..., n_0 - 1\}$) ឬមានតួនៃស្ទីតស្មើរតែទាំងអស់។ ផ្ទុយមកវិញ ℓ មិនមែនជាលីមីតនៃ $\langle a_n \rangle$ កាលណាមាន S_ℓ ដែលគ្មានតួនៃស្ទីតជាអនន្តឬគ្មានតួនៃស្ទីតស្មើរតែទាំងអស់ទេ។

ឧទាហរណ៍ទី១៨

១. ស្ទីត $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ ដែល $a_n = \dfrac{3}{n}$ ជាស្ទីតរួមរកសូន្យ។

២. ស្ទីតថេរ $\langle b_n \rangle$ ដែល $\forall n \in \mathbb{N} , b_n = \ell$ (ℓ ជាចំនួនថេរ) ជាស្ទីតរួម។

៣. ស្ទីត Stationaire $\langle c_n \rangle$ កំណត់ដោយ

$$c_1 , c_2 , c_3 ,..., c_{n_0} , \ell, \ell, \ell,...$$

ជាស្ទីតរួមរក ℓ ។

និយមន័យទី៨ គេមានស្ទីតចំនួនពិត $\langle a_n \rangle$ និង $\langle i_n \rangle$ ជាស្ទីតចំនួនគត់វ៉ឺឡាទីបវិជ្ជមានដែល $i_1 < i_2 < i_3 < ...$ នោះគេថាស្ទីត $\langle a_{i_n} \rangle$ ជាស្ទីតរង (Subsequence) នៃស្ទីត $\langle a_n \rangle$ ។ [៦៧]

ឧទាហរណ៍ទី១៩ គេមានស្ទីត $\langle b_n \rangle = \left\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4},... \right\rangle$ នោះ $\left\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8},... \right\rangle$ ជាស្ទីតរងនៃ $\langle b_n \rangle$ រីឯ $\left\langle \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, ... \right\rangle$ មិនមែនជាស្ទីតរងនៃ $\langle b_n \rangle$ ទេ។

---

[៦៦] https://ia800702.us.archive.org/31/items/SchaumsTheoryProblemsOfGeneralTopology/Lipschutz-GeneralTopology.pdf, op. cit., p. 50

[៦៧] Ibid., p. 51

ទ្រឹស្តីបទទី៧ គ្រប់ស្វ៊ីតចំនួនពិតទាល់ $\langle a_n \rangle$ នោះវាមានស្វ៊ីតរងរួមមួយជានិច្ច។

យើងមានសម្រាយបញ្ជាក់ដូចតទៅ៖

យើងពិនិត្យសំណុំតម្លៃ $\{a_n\}$ នៃស្វ៊ីត $\langle a_n \rangle$។ បើសំណុំតម្លៃវារាប់អស់ នោះស្វ៊ីត $\langle a_n \rangle$ មានស្វ៊ីតរងរួមមួយ។ ម្យ៉ាងទៀត បើសំណុំតម្លៃវាអនន្តជាតុ នោះតាមទ្រឹស្តីបទ Bolzano – Weierstrass នាំឱ្យ $\{a_n\}$ ផ្ទុកចំណុចអាគុយមួយ។ នាំឱ្យស្វ៊ីត $\langle a_n \rangle$ មានស្វ៊ីតរងរួមមួយ។ ដូចនេះ ទ្រឹស្តីបទទី៦ពិត។

និយមន័យទី៩ គេថា ស្វ៊ីតចំនួនពិត $\langle a_n \rangle$ ជាស្វ៊ីតកូស៊ី (Cauchy Sequence) កាលណា

$$\forall \varepsilon > 0 , \exists n_0 \in \mathbb{N} , \forall n,m \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$$ ។ [៦៨]

ទ្រឹស្តីបទទី៨ គ្រប់ស្វ៊ីតកូស៊ី $\langle a_n \rangle$ នៃចំនួនពិតរួមរកចំនួនពិតមួយ។

យើងមានសម្រាយបញ្ជាក់ដូចតទៅ៖

ដោយ $\langle a_n \rangle$ ជាស្វ៊ីតកូស៊ី នាំឱ្យវាជាស្វ៊ីតទាល់។ នាំឱ្យវាផ្ទុកស្វ៊ីតរង $\langle a_{i_n} \rangle$ រួមរក $b \in \mathbb{R}$ ។ នាំឱ្យស្វ៊ីតកូស៊ី $\langle a_n \rangle$ រួមរក $b \in \mathbb{R}$ ដែរ ។

និយមន័យទី១០ គេមានសំណុំ X ជាសំណុំរងនៃ $\mathbb{R}$ ។ គេថា X ជាសំណុំកុំប្លេ កាលណា គ្រប់ស្វ៊ីតកូស៊ីក្នុង X រួមនៅក្នុង X ។ ផ្ទុយមកវិញ X មិនមែនជាសំណុំកុំប្លេ កាលណា គេមានស្វ៊ីតកូស៊ីក្នុង X ដែលជាស្វ៊ីតមិនរួមក្នុង X ឬជាស្វ៊ីតមិនរួម។ [៦៩]

ឧទាហរណ៍ទី២០ បង្ហាញថាសំណុំ $X = \mathbb{N}$ ជាសំណុំកុំប្លេ។

---

៦៨ https://ia800702.us.archive.org/31/items/SchaumsTheoryProblemsOfGeneralTopology/Lipschutz-GeneralTopology.pdf, op. cit., p. 51

៦៩ Ibid., p. 51

យើងមានសម្រាយបញ្ជាក់ដូចតទៅៈ
តាង $\langle a_n \rangle$ ជាស្វ៊ីតកូស៊ីនៃចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបវិជ្ជមាន។ តាមនិយមន័យ នាំឱ្យ
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n, m \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$ ។
បើយើងយក $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ នាំឱ្យ $|a_n - a_m| < \dfrac{1}{2}$ ។
ប៉ុន្តែ $a_n , a_m \in \mathbb{N}$ នាំឱ្យ $a_n = a_m$ ។
នាំឱ្យស្វ៊ីតកូស៊ី $\langle a_n \rangle$ មានទម្រង់

$$\langle a_n \rangle = \left\langle a_1 , a_2 , a_3 ,..., a_{n_0 - 1}, b, b, b,... \right\rangle$$

ដែលជាស្វ៊ីតរួមរក $b \in \mathbb{N}$ ។
ដូចនេះសំណុំ $\mathbb{N}$ ជាសំណុំកុំប្លេ។

ឧទាហរណ៍ទី២១ សំណុំ $\mathbb{Q}^c$ មិនមែនជាសំណុំកុំប្លេទេ។
ចំពោះឧទាហរណ៍ទី២១នេះ ទុកដូចជាលំហាត់។

៥.៥ អនុគមន៍ជាប់

និយមន័យទី១១ គេឱ្យសំណុំ $X \subseteq \mathbb{R}$ ។ គេថា f ពីសំណុំ X ទៅ $\mathbb{R}$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x_0 \in X$ កាលណា

$$\forall \varepsilon > 0 , \exists \eta > 0 , \forall x \in X , | x - x_0 | < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

មានន័យថា $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ ។ [៧០]

ដោយ $|x - x_0| < \eta \Leftrightarrow x \in (x_0 - \eta , x_0 + \eta)$

និង $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Leftrightarrow f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon , f(x_0) + \varepsilon)$ នោះយើងបាន

---

៧០ https://ia800702.us.archive.org/31/items/SchaumsTheoryProblemsOfGeneralTopology/Lipschutz-GeneralTopology.pdf, op. cit., p. 52

និយមន័យសមមូលគឺ

$x \in (x_0-\eta\ ,\ x_0+\eta) \Rightarrow\ f(x)\in(f(x_0)-\varepsilon\ ,\ f(x_0)+\varepsilon)$ ។

គេថា f ពី X ទៅ $\mathbb{R}$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ x_0 កាលណា គ្រប់សំណុំបើក $V_{f(x_0)}$ គេមានសំណុំបើក S_{x_0} មួយដែល $f(S_{x_0}) \subseteq V_{f(x_0)}$ ។

គេថា f ជាអនុគមន៍ជាប់លើ X កាលណា វាជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់គ្រប់ $x_0 \in X$ ។

សម្គាល់ ក្នុងជំពូកទី៥នេះ យើងសន្មតថា អនុគមន៍ ជាអនុវត្តន៍។

ឧទាហរណ៍ទី២២ អនុគមន៍ $f(x)=2x$ ពីសំណុំ $\mathbb{R}$ ទៅ $\mathbb{R}$ ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $\mathbb{R}$ ។

យើងមានសម្រាយបញ្ជាក់ដូចតទៅ៖

យើងបង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ចំណុច x_0 ណាមួយក្នុង $\mathbb{R}$ ។

ចំពោះ $\forall\varepsilon>0$ នាំឱ្យមាន $\eta>0\ ,\ \forall x,\ x_0\in\mathbb{R}$ នាំឱ្យ

$|f(x)-f(x_0)|=|2x-2x_0|=2|x-x_0|<\varepsilon$ បើ $|x-x_0|<\dfrac{\varepsilon}{2}=\eta$ ។

តាមនិយមន័យ យើងបាន f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x_0\in\mathbb{R}$ ។

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $\mathbb{R}$ ។

ទ្រឹស្តីបទទី៩ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើ X លុះត្រាតែ រូបភាពច្រាសនៃគ្រប់សំណុំបើក ជាសំណុំបើក។

ចំពោះទ្រឹស្តីបទទី៩នេះ ទុកដូចជាលំហាត់។

ឧទាហរណ៍ទី២៣ បង្ហាញថា បើ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ជាអនុគមន៍ថេរ នោះគេបាន f ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $\mathbb{R}$ ។

យើងមានសម្រាយបញ្ជាក់តាមពីររបៀបនៃឧទាហរណ៍ទី២៣នេះដូចតទៅ៖

របៀបទី១៖ យើងបង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ចំណុច $x_0\in\mathbb{R}$ ។

ដោយ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ជាអនុគមន៍ថេរ នាំឱ្យ $\forall x\in\mathbb{R}: f(x)=b$ (b ជាចំនួនពិតថេរ)។ ចំពោះ $\forall\varepsilon>0$ យើងមាន $\eta>0$ $(\eta=1)$, $\forall x\in\mathbb{R}$,
$|x-x_0|<\eta=1\Rightarrow |f(x)-f(x_0)|=|b-b|=0<\varepsilon$ ។
តាមនិយមន័យ យើងបាន f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x_0\in\mathbb{R}$ ។
ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $\mathbb{R}$ ។

របៀបទី២៖ ដោយ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ជាអនុគមន៍ថេរ នាំឱ្យ $\forall x\in\mathbb{R}: f(x)=b$ (b ជាចំនួនពិតថេរ)។ នាំឱ្យ $f^{-1}(b)=x$, $b\in\mathbb{R}$ និងចំពោះសំណុំបើក G ក្នុង $\mathbb{R}$ នាំឱ្យ $f^{-1}(G)=\begin{cases}\varnothing\ ,\ b\notin G\\ \mathbb{R}\ ,\ b\in G\end{cases}$ ជាសំណុំបើក ពីព្រោះ $\mathbb{R}$ និង $\varnothing$ ជាសំណុំបើក។
តាមទ្រឹស្តីបទទី៩ នាំឱ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $\mathbb{R}$ ។

លំហាត់តូប៉ូវិទ្យាក្នុង $\mathbb{R}$

១- គេឱ្យ $A=(a,b)$ ជាសំណុំរងមួយនៃ $\mathbb{R}$ ដែល $a<b$។ ចូររកសំណុំចំណុចក្នុងនៃ A ។

២- គេឱ្យ $B=[a,b)$ ជាសំណុំរងមួយនៃ $\mathbb{R}$ ដែល $a<b$។ ចូររកសំណុំចំណុចក្នុងនៃ B ។

៣- គេឱ្យ $C=(a,b]$ ជាសំណុំរងមួយនៃ $\mathbb{R}$ ដែល $a<b$។ ចូររកសំណុំចំណុចក្នុងនៃ C ។

៤- តើសំណុំរាប់អស់មានចំណុចក្នុងដែរឬទេ? ពីព្រោះអ្វី?

៥- តើសំណុំរាប់មិនអស់មានចំណុចក្នុងដែរឬទេ? ពីព្រោះអ្វី?

៦- បើ $a, b\in\mathbb{R}$ ដែល $a<b$ ចូរបង្ហាញថា $B=[a,b)$ មិនមែនជាសំណុំរងបើកនៃ $\mathbb{R}$ ទេ។

៧- បង្ហាញថា ចន្លោះបិទអនន្ត $\{x: x\in\mathbb{R}, x\geq a\}$ និង $\{x: x\in\mathbb{R}, x\leq a\}$ មិនមែនជាសំណុំបើកទេ។

៨- ស្រាយថា សំណុំ $E=\{p\}$, $F=\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ និង $G=\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...\}$ មិនមែនជាសំណុំបើកទេ។

៩- បង្ហាញថា $\mathbb{N}$ មិនមែនជាសំណុំបើកទេ។

១០- បង្ហាញថា $\mathbb{Z}$ មិនមែនជាសំណុំបើកទេ។

១១- បង្ហាញថា $\mathbb{Q}$ មិនមែនជាសំណុំបើកទេ។

១២- បង្ហាញថា $\mathbb{Q}^c$ មិនមែនជាសំណុំបើកទេ។

១៣- បង្ហាញថា ប្រជុំរាប់បាននៃសំណុំបើក ជាសំណុំបើក។

១៤- បង្ហាញថា ប្រសព្វរាប់អស់នៃសំណុំបើក ជាសំណុំបើក។

១៥- បង្ហាញថា បើ $A=[a\ ,\ b)$ នោះគេបាន $A'=[a\ ,\ b]$ ។

១៦- បង្ហាញថា បើ $B=(a\ ,\ b]$ នោះគេបាន $B'=[a\ ,\ b]$ ។

១៧- បង្ហាញថា បើ $C=[a\ ,\ b]$ នោះគេបាន $C'=[a\ ,\ b]$ ។

១៨- បង្ហាញថា $\mathbb{Z}'=\varnothing$ ។

១៩- បង្ហាញថា $\mathbb{Q}'=\mathbb{R}$ ។

២០- បង្ហាញថា $(\mathbb{Q}^c)'=\mathbb{R}$ ។

២១- បង្ហាញថា $\mathbb{R}'=\mathbb{R}$ ។

២២- បង្ហាញថា $\varnothing'=\varnothing$ ។

២៣- បើ $a, b\in\mathbb{R}$ ដែល $a<b$ ចូរបង្ហាញថា $A=[a\ ,\ b)$ មិនមែនជាសំណុំរងបិទនៃ $\mathbb{R}$ ទេ។

២៤- បើ $a, b\in\mathbb{R}$ ដែល $a<b$ ចូរបង្ហាញថា $B=(a\ ,\ b]$ មិនមែនជាសំណុំរងបិទនៃ $\mathbb{R}$ ទេ។

២៥- បង្ហាញថា សំណុំរង A នៃ $\mathbb{R}$ ជាសំណុំបិទ លុះត្រាតែ ចំណុចអាគុយនៃ A ជាធាតុនៃ A ។

២៦- បង្ហាញថា $\mathbb{Z}$ ជាសំណុំបិទ។

២៧- បង្ហាញថា $\mathbb{Q}$ មិនមែនជាសំណុំបិទទេ។

២៨- បង្ហាញថា $\mathbb{Q}^c$ មិនមែនជាសំណុំបិទទេ។

២៩- បង្ហាញថា សំណុំរាប់អស់ E ជាសំណុំបិទ។

៣០- បង្ហាញថា ប្រជុំរាប់អស់នៃសំណុំបិទ ជាសំណុំបិទ។

៣១- បង្ហាញថា ប្រសព្វរាប់បាននៃសំណុំបិទ ជាសំណុំបិទ។

៣២- បង្ហាញថា គ្រប់ស៊ីតរួម ជាស៊ីតកូស៊ី។

៣៣- បង្ហាញថា គ្រប់ស៊ីតកូស៊ី (a_n) នៃចំនួនពិត ជាស៊ីតទាល់។

៣៤- គេឱ្យ (a_n) ជាស៊ីតកូស៊ី។ បើ (a_{i_n}) ជាស៊ីតរងនៃ (a_n) ដែលរួមរក ចំណុច b ។ បង្ហាញថា ស៊ីត (a_n) ក៏រួមរក b ដែរ។

៣៥- បើ (a_n) ជាស៊ីតចំនួនពិតរួមរក b បង្ហាញថា គ្រប់ស៊ីតរង (a_{i_n}) នៃស៊ីត (a_n) ក៏រួមរក b ដែរ។

៣៦- បង្ហាញថា គ្រប់ស៊ីតកូស៊ីនៃចំនួនពិតរួមរកចំនួនពិតមួយ។

៣៧- បើ (a_n) ជាស៊ីតរួមរក a និង (b_n) ជាស៊ីតរួមរក b បង្ហាញថា $(a_n b_n)$ ជាស៊ីតរួមរក ab ។

៣៨- បើ (a_n) ជាស៊ីតរួមរក a និង (b_n) ជាស៊ីតរួមរក b ដែល $b_n \neq 0$ និង $b \neq 0$ បង្ហាញ ថា (a_n / b_n) ជាស៊ីតរួមរក a/b ។

៣៩- បង្ហាញថាសំណុំ $\mathbb{Z}$ ជាសំណុំកុំប្លេ។

៤០- បង្ហាញថាសំណុំ $\mathbb{Q}$ មិនមែនជាសំណុំកុំប្លេទេ។

៤១- បង្ហាញថាសំណុំ $\mathbb{R}$ ជាសំណុំកុំប្លេ។

៤២- បង្ហាញថា $f(x) = x + 1$ ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $(1, 2)$ ។

៤៣- បង្ហាញថា $g(x) = x^2$ ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $(0, 1)$ ។

៤៤- បង្ហាញថាអនុគមន៍ $f(x) = 2x^2$ ពីសំណុំ $\mathbb{R}$ ទៅ $\mathbb{R}$ ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $\mathbb{R}$ ។

៤៥- បង្ហាញថា អនុគមន៍ខ្លួនឯង $i_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $\mathbb{R}$ ។

៤៦- គេមាន $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ និង $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ជាអនុគមន៍ជាប់។ បង្ហាញថា អនុគមន៍បណ្ដាក់ $g\circ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ជាអនុគមន៍ជាប់។

៤៧- គេមាន f ពី $\mathbb{R}$ ទៅ $\mathbb{R}$ ជាអនុគមន៍ជាប់ និង G ជាសំណុំរងបើកនៃ $\mathbb{R}$ ។ បង្ហាញថា $f^{-1}(G)$ ជាសំណុំបើក។

៤៨- បើអនុគមន៍មួយមានរូបភាពច្រាសនៃគ្រប់សំណុំបើក ជាសំណុំបើក ចូរបង្ហាញថា អនុគមន៍នោះ ជាអនុគមន៍ជាប់។

៤៩- គេមាន f ពី $\mathbb{R}$ ទៅ $\mathbb{R}$ ជាអនុគមន៍ជាប់ និង F ជាសំណុំរងបិទនៃ $\mathbb{R}$ ។ បង្ហាញថា $f^{-1}(F)$ ជាសំណុំបិទ។

៥០- បើអនុគមន៍មួយមានរូបភាពច្រាសនៃគ្រប់សំណុំបិទ ជាសំណុំបិទ ចូរបង្ហាញថា អនុគមន៍នោះ ជាអនុគមន៍ជាប់។

៥១- គេមាន $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ និង $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ជាអនុគមន៍ជាប់ ហើយ A ជាសំណុំរងមិនទទេនៃ $\mathbb{R}$ ដែលកំណត់ដោយ $A=\{x\in\mathbb{R}:f(x)=g(x)\}$ ។ បង្ហាញថា A ជាសំណុំបិទ។

៥២- គេឱ្យអនុគមន៍ $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$x\mapsto h(x)=ax+b\ \ (a\neq 0\ ,\ b\neq 0)$$

បង្ហាញថា h ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $\mathbb{R}$ ។

៥៣- បង្ហាញថា $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $a\in\mathbb{R}$ លុះត្រាតែ ចំពោះគ្រប់ ស្វ៊ីត (a_n) រួមរក a នោះស្វ៊ីត $(f(a_n))$ រួមរក $f(a)$ ។

៥៤- បង្ហាញថា សំណុំរង S នៃ $\mathbb{R}$ ជាសំណុំបើក លុះត្រាតែ វាជាប្រជុំនៃចន្លោះបើក។

ជំពូកទី៦

តូប៉ូវិទ្យាក្នុង $\mathbb{R}^2$

(**Topology in** $\mathbb{R}^2$)

៦.១ សំណុំបើកក្នុង $\mathbb{R}^2$

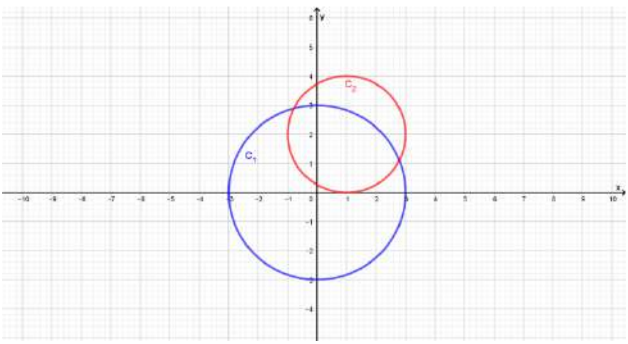
និយមន័យទី១ រង្វង់មានផ្ចិត $x=(x_1, x_2)$ និងកាំ $r>0$ កំណត់ដោយ

$$C(x\ ,\ r)=\{(p_1,\ p_2)\in\mathbb{R}^2 : \sqrt{(p_1-x_1)^2+(p_2-x_2)^2}=r\}$$ ។[៧១]

តាង $d(x, p)$ ជាចម្ងាយធម្មតាពីចំណុច $x=(x_1, x_2)$ ទៅចំណុច $p=(p_1, p_2)$ ដែលកំណត់ដោយ $d(x, p)=\sqrt{(p_1-x_1)^2+(p_2-x_2)^2}$ នោះយើងបាន

$$C(x\ ,\ r)=\{p\in\mathbb{R}^2 : d(x, p)=r\}$$ ។

ឧទាហរណ៍ទី១ ចូរសង់រង្វង់ $C_1=C((0,0)\ ,\ 3)$ និង $C_2=C((1,2)\ ,\ 2)$ ។



រូបទី២៣

[៧១] https://ia800702.us.archive.org/31/items/SchaumsTheoryProblemsOfGeneralTopology/Lipschutz-GeneralTopology.pdf, op. cit., p. 53

ទ្រឹស្តីបទទី១ ចំពោះគ្រប់ចំណុច $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ នោះគេបានវិសមភាព

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \text{ ។}$$

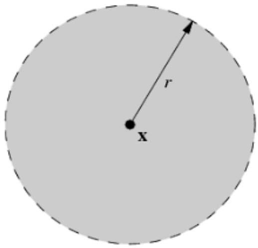
ចំពោះទ្រឹស្តីបទទី១នេះ ទុកដូចជាលំហាត់។

និយមន័យទី២

- ថាសបើកមានផ្ចិត x និងកាំ $r>0$ កំណត់ដោយ

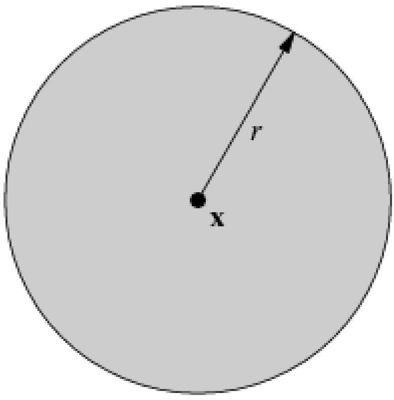
$$D(x\ ,\ r) = \{p \in \mathbb{R}^2 : d(x, p) < r\} \text{ ។}$$

រូបទី២៤៖ ថាសបើក



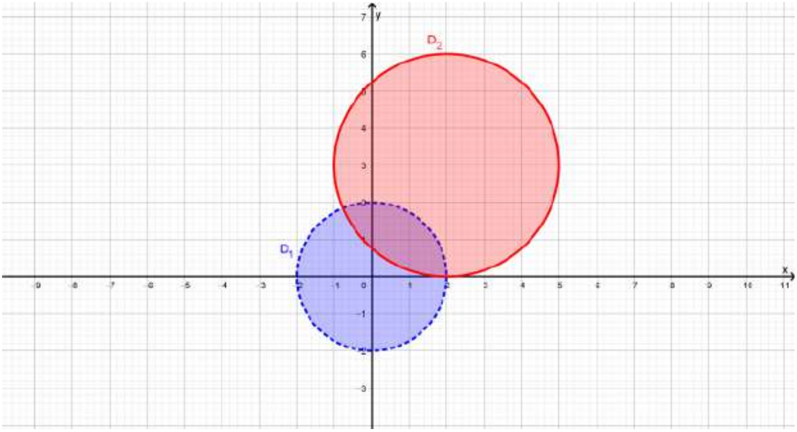
- ថាសបិទមានផ្ចិត x និងកាំ $r>0$ កំណត់ដោយ

$$\overline{D}(x\ ,\ r) = \{p \in \mathbb{R}^2 : d(x, p) \leq r\} \text{ ។}$$



រូបទី២៥៖ ថាសបិទ

ឧទាហរណ៍ទី២ ចូរសង់ថាស $D_1 = D((0,0)\ ,\ 2)$ និង $D_2 = \overline{D}((2,3)\ ,\ 3)$ ។

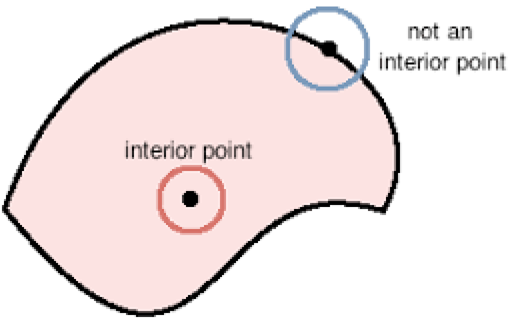


រូបទី២៦

និយមន័យទី៣ (**ចំណុចក្នុង** Interior Point) គេមាន A ជាសំណុំរង មួយនៃ $\mathbb{R}^2$ និង $p \in A$ ។ គេថា p ជាចំណុចក្នុងនៃ A កាលណា $\exists r > 0$ ដែល $D(p,r) \subseteq A$ ។

គេកំណត់តាងសំណុំចំណុចក្នុងនៃ A ដោយ $\text{int}(A)$ ឬ $\mathring{A}$ ។[៧២]
បើ p មិនមែនជាចំណុចក្នុងនៃ A សមមូល $\forall r > 0$ ដែល $D(p,r) \not\subset A$ ។

រូបទី២៧៖ ចំណុចក្នុង



៧២ https://ia800702.us.archive.org/31/items/SchaumsTheoryProblemsOfGeneralTopology/Lipschutz-GeneralTopology.pdf, op. cit., p. 53

និយមន័យទី៤ គេថា សំណុំរង A នៃ $\mathbb{R}^2$ ជាសំណុំបើក (Open set) កាលណាគ្រប់ធាតុនៃ A សុទ្ធតែជាចំណុចក្នុងនៃ A ហើយ A មិនមែនជាសំណុំបើកកាលណាមានធាតុនៃ A ដែលមិនមែនជាចំណុចក្នុងនៃ A ។[៧៣] យើងបាន៖

A ជាសំណុំបើក សមមូល $\forall p \in A \Rightarrow p \in \overset{\circ}{A}$

និង A មិនមែនជាសំណុំបើក សមមូល $\exists p \in A \wedge p \notin \overset{\circ}{A}$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៣ ថាសបើក ជាសំណុំបើក។

យើងមានសម្រាយបញ្ជាក់ដូចតទៅ៖

ចំពោះចំណុច $y \in D\,(x\,,\,r) = \{p \in \mathbb{R}^2 : d(x,\,p) < r\}$ នាំឱ្យ $d(x,\,y) < r$ ។

យើងកំណត់ $r' = r - d(x,\,y) > 0$ ។

ឧបមាថា $z \in D\,(y\,,\,r')$ នាំឱ្យ $d(y,\,z) < r'$

សមមូល $d(y,\,z) < r - d(x,\,y)$

សមមូល $d(x,\,y) + d(y,\,z) < r$

សមមូល $d(x,\,z) \le d(x,\,y) + d(y,\,z) < r$ (តាមទ្រឹស្តីបទទី១)។

នាំឱ្យ $d(x,\,z) < r$ ។ នាំឱ្យ $z \in D\,(x\,,\,r)$ ។

នាំឱ្យ $D\,(y\,,\,r') \subseteq D\,(x\,,\,r)$ ។

យើងបាន ចំពោះចំណុច $y \in D\,(x\,,\,r)$ នាំឱ្យមានថាសបើក $D\,(y\,,\,r')$ ផ្ទុក y ដែល $y \in D\,(y\,,\,r') \subseteq D\,(x\,,\,r)$ ។ តាមនិយមន័យ នាំឱ្យ y ជាចំណុចក្នុងនៃ $D\,(x\,,\,r)$ ។

ដូចនេះ $D\,(x\,,\,r)$ ជាសំណុំបើក។

ឧទាហរណ៍ទី៤ ប្រសព្វនៃពីរថាសបើក ជាសំណុំបើក។

---

៧៣ https://ia800702.us.archive.org/31/items/SchaumsTheoryProblemsOfGeneralTopology/Lipschutz-GeneralTopology.pdf, op. cit., p. 53

ចំពោះឧទាហរណ៍ទី៤នេះ ទុកដូចជាលំហាត់។

ទ្រឹស្តីបទទី២ ប្រជុំរាប់បាននៃសំណុំរងបើកនៃ $\mathbb{R}^2$ ជាសំណុំបើក។

យើងមានសម្រាយបញ្ជាក់ដូចតទៅ៖

តាង $\mathcal{A}$ ជាថ្នាក់នៃសំណុំរងបើកនៃ $\mathbb{R}^2$ និងតាង H ជាប្រជុំរាប់បាននៃសំណុំរងបើកនៃ $\mathbb{R}^2$ គឺ $\mathrm{H}=\cup\{\mathrm{G}:\mathrm{G}\in\mathcal{A}\}=\bigcup\limits_{\mathrm{G}\in\mathcal{A}}\mathrm{G}$ ហើយតាង $\mathrm{p}\in\mathrm{H}$ ។

ដោយ $\mathrm{p}\in\mathrm{H}$ នាំឱ្យមាន $\mathrm{G}_0\in\mathcal{A}$ ដែល $\mathrm{p}\in\mathrm{G}_0$ ។ ប៉ុន្តែ G_0 ជាសំណុំបើក នាំឱ្យមានថាសបើក D_p ផ្ទុក p ដែល $\mathrm{p}\in\mathrm{D}_\mathrm{p}\subseteq\mathrm{G}_0$ ។

ដោយ $\mathrm{G}_0\subseteq\mathrm{H}$ នាំឱ្យ $\mathrm{D}_\mathrm{p}\subseteq\mathrm{H}$ ។ មានន័យថា p ជាចំណុចក្នុងនៃ H ។

ដូចនេះ យើងបាន H ជាសំណុំបើក។

ទ្រឹស្តីបទទី៣ ប្រសព្វរាប់អស់នៃសំណុំរងបើកនៃ $\mathbb{R}^2$ ជាសំណុំបើក។

ចំពោះទ្រឹស្តីបទទី៣នេះ ទុកដូចជាលំហាត់។

៦.២ ចំណុចអាគុយ

និយមន័យទី៥ គេមាន A ជាសំណុំរងនៃ $\mathbb{R}^2$ និង $\mathrm{p}\in\mathbb{R}^2$ ។ គេថា p ជាចំណុចអាគុយនៃ A កាលណា គ្រប់ថាសបើកដែលមាន p មានចំណុចនៃ A ផ្សេងពី p មានន័យថា $\forall \mathrm{r}>0\ ,\ (\mathrm{D}(\mathrm{p},\mathrm{r})\cap\mathrm{A})\setminus\{\mathrm{p}\}\neq\varnothing$ ។ សំណុំចំណុចអាគុយនៃ A ហៅថា សំណុំដេរីវេ ឬ សំណុំលីមីតនៃ A តាងដោយ A' ។[៧៤]

ផ្ទុយមកវិញ p មិនមែនជាចំណុចអាគុយនៃ A

សមមូល $\exists \mathrm{r}>0\ ,\ (\mathrm{D}(\mathrm{p},\mathrm{r})\cap\mathrm{A})\setminus\{\mathrm{p}\}=\varnothing$

---

៧៤ https://ia800702.us.archive.org/31/items/SchaumsTheoryProblemsOfGeneralTopology/Lipschutz-GeneralTopology.pdf, op. cit., p. 53

សមមូល $\exists r > 0$, $D(p,r) \cap A = \{p\}$ ឬ $D(p,r) \cap A = \varnothing$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៥ បើសំណុំ $A = (1\ ,\ 2) \times (3\ ,\ 4)$ ចូរកំណត់សំណុំ A' ។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖
តាមឧទាហរណ៍ទី៩នៃជំពូកទី៥ នាំឱ្យ $(1\ ,\ 2)' = [1\ ,\ 2]$ និង $(3\ ,\ 4)' = [3\ ,\ 4]$ ។
ដូចនេះ សំណុំ $A' = [1\ ,\ 2] \times [3\ ,\ 4]$ ។

ទ្រឹស្តីបទទី៤ គេមាន A ជាសំណុំរងនៃ $\mathbb{R}^2$ និង $p \in \mathbb{R}^2$ ។ បើ p ជាចំណុចអាគុយនៃ A នោះគ្រប់សំណុំបើកដែលមាន p មានចំណុចនៃ A ជាអនន្ត។
ចំពោះទ្រឹស្តីបទទី៤នេះ ទុកដូចជាលំហាត់។

៦.៣ សំណុំបិទ

និយមន័យទី៦ គេថាសំណុំរង A នៃ $\mathbb{R}^2$ ជាសំណុំបិទ កាលណា សំណុំរងបំពេញនៃ A ជាសំណុំបើក។ មានន័យថា A ជាសំណុំបិទ សមមូល A^c ជាសំណុំបើក។ [៧៥]

ឧទាហរណ៍ទី៦ ថាសបិទ ជាសំណុំបិទ។

យើងមានសម្រាយបញ្ជាក់ដូចតទៅ៖
យើងមានថាសបិទមានផ្ចិត a និងកាំ $r > 0$ កំណត់ដោយ
$\overline{D}(a\ ,\ r) = \{x \in \mathbb{R}^2 : d(x, a) \le r\}$ ។ នាំឱ្យ $\overline{D}(a\ ,\ r)^c = \{x \in \mathbb{R}^2 : d(x, a) > r\}$ ។
ដើម្បីបង្ហាញថា $\overline{D}(a\ ,\ r)$ ជាសំណុំបិទ យើងគ្រាន់តែស្រាយថា $\overline{D}(a\ ,\ r)^c$ ជាសំណុំបើក។ តាង $y \in \overline{D}(a\ ,\ r)^c$ ។ នោះ $\exists\, q > 0,\ d(y, a) = q > r$ ។

---

៧៥ https://ia800702.us.archive.org/31/items/SchaumsTheoryProblemsOfGeneralTopology/Lipschutz-GeneralTopology.pdf, op. cit., p. 54

តាង $r^{*}=\frac{q-r}{2}$ ។ នោះយើងបាន $\overline{D}(a\ ,\ r)\cap D(y\ ,\ r^{*})=\varnothing$ នាំឱ្យ $D(y\ ,\ r^{*})\subseteq\overline{D}(a\ ,\ r)^{c}$ ។ នាំឱ្យ $y\in\operatorname{int}(\overline{D}(a,\ r)^{c})$ ហើយ $\overline{D}(a,\ r)^{c}=\operatorname{int}(\overline{D}(a,\ r)^{c})$ ។ នាំឱ្យ $\overline{D}(a\ ,\ r)^{c}$ ជាសំណុំបើក។ ដូចនេះ យើងបាន $\overline{D}(a\ ,\ r)$ ជាសំណុំបិទ។

ទ្រឹស្តីបទទី៤ សំណុំរង A នៃ $\mathbb{R}^2$ ជាសំណុំបិទ លុះត្រាតែ ចំណុចអាគុយនៃ A ជាធាតុនៃ A មានន័យថា A ជាសំណុំបិទ $\Leftrightarrow A'\subseteq A$ ។

យើងមានសម្រាយបញ្ជាក់ដូចតទៅ៖

$(\Rightarrow)$ ឧបមាថា p ជាចំណុចអាគុយនៃសំណុំបិទ A ។ នោះគ្រប់ថាសបើកដែលមាន p ផ្ទុកចំណុចនៃ A ផ្សេងពី p ។ ដូចនេះ វាមិនអាចមានថាសបើក D_p ដែលមាន p គឺផ្ទុកនៅ A^c ។ នាំឱ្យ p មិនមែនជាចំណុចក្នុងនៃ A^c ។ ប៉ុន្តែ A^c ជាសំណុំបើក ពីព្រោះ A ជាសំណុំបិទ នាំឱ្យ $p\notin A^c$ មានន័យថា $p\in A$ ។

$(\Leftarrow)$ ឧបមាថាសំណុំ A ផ្ទុកចំណុចអាគុយនីមួយៗរបស់វា។ យើងនឹងស្រាយថា A ជាសំណុំបិទ មានន័យថា A^c ជាសំណុំបើក។ តាង $p\in A^c$ ។ ដោយ A ផ្ទុកចំណុចអាគុយនីមួយៗរបស់វា នាំឱ្យ p មិនមែនជាចំណុចអាគុយនៃ A ។ នាំឱ្យមានយ៉ាងហោចថាសបើក D_p មួយផ្ទុក p ដែល D_p មិនមានចំណុចណាមួយនៃ A ។ នាំឱ្យ $D_p\subseteq A^c$ ហើយនាំឱ្យ p ជាចំណុចក្នុងនៃ A^c ។ ដោយចំណុចនីមួយៗ $p\in A^c$ ជាចំណុចក្នុង នាំឱ្យ A^c ជាសំណុំបើក។ ដូចនេះ A ជាសំណុំបិទ។

ទ្រឹស្តីបទទី៥ ប្រជុំរាប់អស់នៃសំណុំរងបិទនៃ $\mathbb{R}^2$ ជាសំណុំបិទ។

ទ្រឹស្តីបទទី៦ ប្រសព្វរាប់បាននៃសំណុំរងបិទនៃ $\mathbb{R}^2$ ជាសំណុំបិទ។

ចំពោះទ្រឹស្តីបទទី៥និងទី៦នេះ ទុកដូចជាលំហាត់។

៦.៤ ស៊ីត

និយមន័យទី៧

- គេថាស៊ីត $\langle a_n, b_n\rangle$ ក្នុង $\mathbb{R}^2$ ជាស៊ីតរួមរក $\langle a, b\rangle$ កាលណា $a_n \to a$ និង $b_n \to b$ ។[៧៦]

- គេថាស៊ីត $\langle a_n, b_n\rangle$ ក្នុង $\mathbb{R}^2$ ជាស៊ីតកូស៊ី កាលណា $\langle a_n\rangle$ និង $\langle b_n\rangle$ ជាស៊ីតកូស៊ីក្នុង $\mathbb{R}$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៧ ស៊ីត $\langle a_n, b_n\rangle = \left\langle \dfrac{3n^2}{2n^2-3n+5}\ ,\ \dfrac{7\cos n}{n^2}\right\rangle$ ក្នុង $\mathbb{R}^2$ ជាស៊ីតរួមរក $\langle 3/2, 0\rangle$ ពីព្រោះ

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2}{2n^2-3n+5} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{2-3/n+5/n^2} = \frac{3}{2}$$ និង

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left|\frac{7\cos n}{n^2}\right| \le \frac{7}{n^2}\ ,\ \lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{7\cos n}{n^2} = 0$$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៨ សំណុំ $\mathbb{R}^2$ ជាសំណុំកុំប្លេ។

យើងមានសម្រាយបញ្ជាក់ដូចតទៅ៖

តាមលំហាត់ទី៤១នៃជំពូកទី៥ថា សំណុំ $\mathbb{R}$ ជាសំណុំកុំប្លេ។

នាំឱ្យសំណុំ $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ជាសំណុំកុំប្លេ។

៦.៥ អនុគមន៍ជាប់

និយមន័យទី៨ គេថា $f(x,y)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ចំណុច (x_0, y_0)

---

៧៦ https://ia800702.us.archive.org/31/items/SchaumsTheoryProblemsOfGeneralTopology/Lipschutz-GeneralTopology.pdf, op. cit., p. 54

នៃដែនកំណត់របស់ f (តាងដោយ $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$) បើ

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall (x, y) \in D_f$, $|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta$

$\Rightarrow |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$ ។[៧៧]

គេថា $f(x, y)$ ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$ កាលណា វាជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់គ្រប់ចំណុច $(x_0, y_0) \in D_f$ ។

សម្គាល់ ចំណុចដែល $f(x, y)$ មិនមែនជាអនុគមន៍ជាប់ ហៅថា ចំណុចដាច់ ឬ អនុគមន៍ $f(x, y)$ ហៅថា អនុគមន៍ដាច់ត្រង់ចំណុចនោះ។

ឧទាហរណ៍ទី៩ បង្ហាញថា អនុគមន៍ $f(x, y) = x^2 + y$ ពីសំណុំ $\mathbb{R}^2$ ទៅ $\mathbb{R}$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ចំណុច $(1, 3)$ ។

យើងមានសម្រាយបញ្ជាក់ដូចតទៅ៖

ចំពោះ $\forall \varepsilon > 0$ និង $\forall (x, y) \in D_f = \mathbb{R}^2$ យើងបាន

$$|f(x, y) - f(1, 3)| = |x^2 + y - 4| < \varepsilon$$

កាលណា $|x - 1| < \delta$, $|y - 3| < \delta$ ។

បើ $|x - 1| < \delta$ និង $|y - 3| < \delta$ នោះ

$-\delta < x - 1 < \delta$ និង $-\delta < y - 3 < \delta$ ។

នាំឱ្យ $1 - \delta < x < 1 + \delta$ និង $3 - \delta < y < 3 + \delta$ ។

ដោយចន្លោះទាំងនេះមិនរាប់បញ្ចូល $x = 1, y = 3$ នាំឱ្យ

$(1 - \delta)^2 < x^2 < (1 + \delta)^2$ និង $3 - \delta < y < 3 + \delta$ ។

នាំឱ្យ $(1 - \delta)^2 + 3 - \delta < x^2 + y < (1 + \delta)^2 + 3 + \delta$

សមមូល $4 - 3\delta + \delta^2 < x^2 + y < 4 + 3\delta + \delta^2$

---

[៧៧] http://vle.du.ac.in/file.php/590/Limit_and_Continuity_of_Functions_of_several_variables/Limits_and_Continuity_of_Functions_of_several_Variables.pdf, p. 20

សមមូល $-3\delta+\delta^2 < x^2+y-4 < 3\delta+\delta^2$ ។

បើ $0<\delta\le 1$ នាំឱ្យ $-4\delta < x^2+y-4 < 4\delta$

សមមូល $|f(x, y)-f(1, 3)| = |x^2+y-4| < 4\delta = \varepsilon$ ។

បើយើងយក $\delta=\dfrac{\varepsilon}{4}$ នាំឱ្យ $|f(x, y)-f(1, 3)| < \varepsilon$

នៅពេលដែល $|x-1|<\delta,\ |y-3|<\delta$ ។

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ចំណុច $(1, 3)$ ។

និយមន័យទី៩ គេថា $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $p=(p_1, p_2)$ កាលណា គ្រប់សំណុំបើក $V_{f(p)}$ គេមានសំណុំបើក G_p ដែល $f(G_p)\subseteq V_{f(p)}$ ។[៧៨]

ឧទាហរណ៍ទី១០ អនុគមន៍ $f(x, y)=(3x, 5y)$ ពីសំណុំ $\mathbb{R}^2$ ទៅ $\mathbb{R}^2$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $(1, 2)$ ។

ទ្រឹស្តីបទទី៧ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $p\in\mathbb{R}^2$ លុះត្រាតែ រូបភាពច្រាសនៃគ្រប់សំណុំបើកដែលមាន $f(p)$ ជាសំណុំបើកដែលមាន p ។

ទ្រឹស្តីបទទី៨ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $p\in\mathbb{R}^2$ លុះត្រាតែ រូបភាពច្រាសនៃគ្រប់ សំណុំបិទដែលមាន $f(p)$ ជាសំណុំបិទដែលមាន p ។

ចំពោះទ្រឹស្តីបទទីពនិងទី៨នេះ ទុកដូចជាលំហាត់។

---

៧៨ https://ia800702.us.archive.org/31/items/SchaumsTheoryProblemsOfGeneralTopology/Lipschutz-GeneralTopology.pdf, op. cit., p. 54

លំហាត់គូប៉ូវិទ្យាក្នុង $\mathbb{R}^2$

១- ចូរសង់រង្វង់ $C((0,0)\,,\,2)$ និង $C((2,-1)\,,\,3)$ ។

២- ចូរសង់ថាស $D((1,0)\,,\,3)$ និង $\overline{D}((-2,-3)\,,\,3)$ ។

៣- បើសំណុំ $A=(1\,,\,5)\times[3\,,\,7)$ ចូរកំណត់សំណុំ A' ។

៤- បង្ហាញថា $E=[0,\,3]\times[1,\,6]$ ជាសំណុំបិទ។

៥- បង្ហាញថាស្វ៊ីត $(a_n\,,b_n)=(5/n\,,\,(2n+3)/n)$ ក្នុង $\mathbb{R}^2$ ជាស្វ៊ីតរួមរក $(0,\,2)$ ។

៦- បង្ហាញថាអនុគមន៍ $g(x,\,y)=(2x^2,\,5\sin y)$ ពីសំណុំ $\mathbb{R}^2$ ទៅ $\mathbb{R}^2$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ចំណុច $(2,\,0)$ ។

៧- បង្ហាញថាអនុគមន៍ $f(x,\,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y^3}{x^2+y^2}\,, & (x,\,y)\neq(0,\,0)\\ 0\,, & (x,\,y)=(0,\,0)\end{cases}$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ចំណុច $(0,\,0)$ ។

៨- បង្ហាញថា ប្រជុំរាប់បាននៃសំណុំរងបើកនៃ $\mathbb{R}^2$ ជាសំណុំបើក។

៩- បង្ហាញថា គ្រប់សំណុំរងបើក G នៃប្លង់ $\mathbb{R}^2$ ជាប្រជុំនៃថាសបើក។

១០- បង្ហាញថា ប្រសព្វរាប់អស់នៃសំណុំរងបើកនៃ $\mathbb{R}^2$ ជាសំណុំបើក។

១១- គេមាន G ជាសំណុំរងបើកនៃ $\mathbb{R}^2$ និង $p\in G$ ។ បង្ហាញថា មានថាសបើក D មានផ្ចិត p ដែល $p\in D\subseteq G$ ។

១២- គេមាន A ជាសំណុំរងនៃ $\mathbb{R}^2$ និង $p\in\mathbb{R}^2$ ។ បង្ហាញថា បើ p ជាចំណុចអាគុយនៃ A នោះគេបានគ្រប់សំណុំបើកដែលមាន p មានចំណុចនៃ A ជា

អនន្ត។

១៣- គេឱ្យថាសបើក D_p ដែលមានផ្ចិត $p \in \mathbb{R}^2$ និងកាំ δ។ បង្ហាញថា មានថាស បើក D ដែលផ្ចិតវាមានកូអរដោណេជាចំនួនសនិទាន កាំវាជាចំនួនសនិទាន និង $p \in D \subseteq D_p$។

១៤- បង្ហាញថា គ្រប់សំណុំរងបើក G នៃប្លង់ $\mathbb{R}^2$ ជាប្រជុំនៃថាសបើករាប់បាន។

១៥- បង្ហាញថា $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ជាសំណុំបិទ $\Leftrightarrow A' \subseteq A$ ។

១៦- បង្ហាញថា ប្រជុំរាប់អស់នៃសំណុំបិទ ជាសំណុំបិទ។

១៧- បង្ហាញថា ប្រសព្វរាប់បាននៃសំណុំបិទ ជាសំណុំបិទ។

១៨- បង្ហាញថា $\mathbb{R}^2$ ជាសំណុំកុំប្លេ។

១៩- បង្ហាញថា $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ជាអនុគមន៍ជាប់ លុះត្រាតែ រូបភាពច្រាសនៃគ្រប់សំណុំបើក ជាសំណុំបើក។

២០- បង្ហាញថា $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ជាអនុគមន៍ជាប់ លុះត្រាតែ រូបភាពច្រាសនៃគ្រប់សំណុំបិទ ជាសំណុំបិទ។

២១- បង្ហាញថា សំណុំរង B នៃ $\mathbb{R}^2$ ជាសំណុំបិទ លុះត្រាតែ $d(p,B) = 0 \Rightarrow p \in B$ ដែល $d(p,B) = \inf\{d(p,q) : q \in B\}$។

ជំពូកទី៧

លំហតូប៉ូ និង លំហមេទ្រិក

(**Topological and Metric Spaces**)

៧.១ លំហតូប៉ូ

និយមន័យទី១ គេមានសំណុំមិនទទេ X និង T ជាគ្រួសារសំណុំរងនៃ X ។ គេថា T ជាតូប៉ូវិទ្យាមួយលើ X កាលណាវាផ្ទៀងផ្ទាត់នូវស្វ័យសត្យទាំងបីខាងក្រោម៖

១. សំណុំ X និង $\varnothing$ ជាធាតុនៃ T ។

២. ប្រជុំរាប់អស់ឬអនន្តធាតុនៃសំណុំក្នុង T ជាធាតុនៃ T ។

៣. ប្រសព្វនៃពីរសំណុំណាមួយក្នុង T ជាធាតុនៃ T ។

បើ T ជាតូប៉ូវិទ្យាមួយលើ X នោះគូឬប្រព័ន្ធ (X, T) ហៅថា លំហតូប៉ូ ហើយធាតុនីមួយៗនៃ T ជាសំណុំបើកធៀបនឹង T ដែលគេកំណត់សរសេរដោយ T – បើក ។[៧៩]

ឧទាហរណ៍ទី១ តាង u ជាថ្នាក់នៃសំណុំបើកទាំងអស់នៃចំនួនពិត។ នោះគេបាន u ជាតូប៉ូវិទ្យាមួយលើ $\mathbb{R}$ ។ គេហៅវាថាជា តូប៉ូវិទ្យាធម្មតាឬតូប៉ូវិទ្យាអឺគ្លីដលើ $\mathbb{R}$ ។ ស្រដៀងគ្នាដែរ ថ្នាក់ u នៃសំណុំបើកទាំងអស់ក្នុងប្លង់ $\mathbb{R}^2$ ជាតូប៉ូវិទ្យា ហើយគេហៅវាថាជា តូប៉ូវិទ្យាធម្មតាឬតូប៉ូវិទ្យាអឺគ្លីដលើ $\mathbb{R}^2$ ។

---

៧៩ https://ia800702.us.archive.org/31/items/SchaumsTheoryProblemsOfGeneralTopology/Lipschutz-GeneralTopology.pdf, op. cit., p. 66

ឧទាហរណ៍ទី២ តាង $\mathcal{T}=\{X,\varnothing\}$ ជាតូប៉ូវិទ្យាលើ X ។ តូប៉ូវិទ្យានេះ ហៅថាជា តូប៉ូវិទ្យាអាំងឌីសក្រេត ហើយគូ $(X,\mathcal{T})$ ហៅថាជា លំហតូប៉ូអាំងឌីសក្រេត ឬលំហអាំងឌីសក្រេត។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចខាងក្រោម៖

$\mathcal{T}=\{X,\varnothing\}$ ជាតូប៉ូវិទ្យាមួយលើ X ពីព្រោះ

$X,\varnothing\in\mathcal{T},\ X\cup\varnothing=X\in\mathcal{T}\ \wedge\ X\cap\varnothing=\varnothing\in\mathcal{T}$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៣ តាង $\mathcal{D}$ ជាថ្នាក់នៃសំណុំរងទាំងអស់នៃ X ។ នោះគេបាន $\mathcal{D}$ ជាតូប៉ូវិទ្យាលើ X ។ តូប៉ូវិទ្យានេះ ហៅថាជា តូប៉ូវិទ្យាឌីសក្រេត ហើយគូ $(X,\mathcal{D})$ ហៅថាជា លំហតូប៉ូឌីសក្រេតឬលំហឌីសក្រេត។
ចំពោះឧទាហរណ៍ទី៣នេះ ទុកដូចជាលំហាត់។

ឧទាហរណ៍ទី៤ គេឱ្យ $Y=\{a,b,c,d,e\}$ ។ យើងបាន៖

ក. $T_1=\{Y,\varnothing,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d\}\}$ មិនមែនជាតូប៉ូវិទ្យាលើ Y ទេ។

ខ. $T_2=\{Y,\varnothing,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{a,b,d,e\}\}$ មិនមែនជាតូប៉ូវិទ្យាលើ Y ទេ។

គ. $T_3=\{Y,\varnothing,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e\}\}$ ជាតូប៉ូវិទ្យាមួយលើ Y ។

យើងមានដំណោះស្រាយតែសំណួរ ក. និង ខ. ដូចខាងក្រោម រីឯសំណួរ គ. ទុកជាលំហាត់។

ក. T_1 មិនមែនជាតូប៉ូវិទ្យាលើ Y ទេ ពីព្រោះ

$\{a\}\cup\{b,c,d\}=\{a,b,c,d\}\notin T_1$ ។

ខ. T_2 មិនមែនជាតូប៉ូវិទ្យាលើ Y ទេ ពីព្រោះ

$\{a,c,d\}\cup\{b,c,d,e\}=\{a,b,c,d,e\}\notin T_2$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៥ រកតូប៉ូឡូជីដែលអាចមានទាំងអស់លើសំណុំ $X=\{a,b\}$ ។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖

តូប៉ូឡូជីដែលអាចមានទាំងអស់លើសំណុំ $X=\{a,b\}$ គឺ៖

១. $T_1=\{\varnothing, \{a,b\}\}$

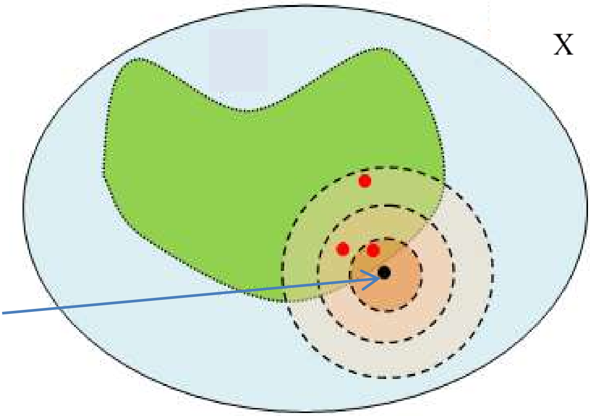
២. $T_2=\{\varnothing, \{a\},\{a,b\}\}$

៣. $T_3=\{\varnothing, \{b\},\{a,b\}\}$

៤. $T_4=\{\varnothing, \{a\},\{b\},\{a,b\}\}$ ។

៧.២ ចំណុចអាគុយ

និយមន័យទី២ គេមាន (X, T) ជាលំហតូប៉ូ , $A\subseteq X$ និង $p\in X$ ។ គេថា $p\in A' \Leftrightarrow \forall G_p\in T, (G_p\cap A)\setminus\{p\}\neq\varnothing$ ។ សំណុំចំណុចអាគុយនៃ A ហៅថា សំណុំដេរីវេ ឬ សំណុំលីមីតនៃ A តាងដោយ A' ។[៨០] ផ្ទុយមកវិញ $p\notin A' \Leftrightarrow \exists G_p\in T, (G_p\cap A)\setminus\{p\}=\varnothing$ ។



រូបទី២៨៖ ចំណុចអាគុយ

[៨០] https://ia800702.us.archive.org/31/items/SchaumsTheoryProblemsOfGeneralTopology/Lipschutz-GeneralTopology.pdf, op. cit., p. 67

ឧទាហរណ៍ទី៦ គេឱ្យ $T=\{X, \varnothing,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e\}\}$ ជាតូប៉ូឡូជីលើ $X=\{a,b,c,d,e\}$ និង $A=\{a,b,c\}$ ។ ចូរកំណត់រក A' ។

យើងមានដំណោះស្រាយរកសំណុំ A' ដូចតទៅ៖

ក. សំណុំបើកដែលមាន a (G_a) គឺ X , $\{a\}$, $\{a, c, d\}$ ។

ដោយ $(\{a\}\cap A)\setminus\{a\}=\varnothing$ នាំឱ្យ $a\notin A'$ ។

ខ. សំណុំ G_b គឺ X , $\{b,c,d,e\}$ ។

ដោយ $(X\cap A)\setminus\{b\}=\{a,c\}\neq\varnothing$ និង

$(\{b,c,d,e\}\cap A)\setminus\{b\}=\{c\}\neq\varnothing$ នាំឱ្យ $b\in A'$ ។

គ. សំណុំ G_c គឺ $X,\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e\}$ ។

ដោយ $(\{c,d\}\cap A)\setminus\{c\}=\varnothing$ នាំឱ្យ $c\notin A'$ ។

ឃ. សំណុំ G_d គឺ $X,\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e\}$ ។

ដោយ $(X\cap A)\setminus\{d\}=A\neq\varnothing$

$(\{c,d\}\cap A)\setminus\{d\}=\{e\}\neq\varnothing$

$(\{a,c,d\}\cap A)\setminus\{d\}=\{a,c\}\neq\varnothing$

និង $(\{b,c,d,e\}\cap A)\setminus\{d\}=\{b,c\}\neq\varnothing$ នាំឱ្យ $d\in A'$ ។

ង. សំណុំ G_e គឺ X , $\{b,c,d,e\}$ ។

ដោយ $(X\cap A)\setminus\{e\}=A\neq\varnothing$

និង $(\{b,c,d,e\}\cap A)\setminus\{e\}=\{b,c\}\neq\varnothing$ នាំឱ្យ $e\in A'$ ។

ដូចនេះ $A'=\{b, d, e\}$ ។

៧.៣ សំណុំបិទ

និយមន័យទី៣ គេថាសំណុំរង A នៃលំហតូប៉ូ (X, T) ជាសំណុំបិទធៀប

នឹង T កាលណា A^c ជាសំណុំបើកធៀបនឹង T ។ [៨១]

ឧទាហរណ៍ទី៧ គេឱ្យ $T=\{X,\varnothing,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e\}\}$ ជាតូប៉ូវិទ្យាលើ $X=\{a,b,c,d,e\}$ ។ រកសំណុំរងបិទទាំងអស់នៃ X ធៀបនឹង T ។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅៈ
ដោយធាតុទាំងអស់នៃ T ជាសំណុំបើក នោះតាមនិយមន័យនាំឱ្យសំណុំរងបិទទាំងអស់នៃ X ធៀបនឹង T គឺ $\varnothing, X,\{b,c,d,e\},\{a,b,e\},\{b,e\},\{a\}$ ។

ទ្រឹស្តីបទទី១ ក្នុងលំហតូប៉ូ (X, T) នោះគេបានសំណុំរង A នៃ X ជាសំណុំបើក លុះត្រាតែ សំណុំរងបំពេញនៃ A ជាសំណុំបិទ។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅៈ
ចំពោះសំណុំរង A នៃ X យើងបាន $A=(A^c)^c$ ។

បើ A^c ជាសំណុំបិទ $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $A=(A^c)^c$ ជាសំណុំបើក (ពិត) ។

ទ្រឹស្តីបទទី២ គេមាន (X, T) ជាលំហតូប៉ូណាមួយ។ នោះគេបានថ្នាក់នៃសំណុំរងបិទនៃ X មានលក្ខណៈដូចតទៅៈ

ក. សំណុំ $\varnothing$ និង X ជាសំណុំបិទ។

ខ. ប្រសព្វរាប់អស់ឬអនន្តធាតុនៃសំណុំបិទ ជាសំណុំបិទ។

គ. ប្រជុំនៃពីរសំណុំបិទណាក៏ដោយ ជាសំណុំបិទ។ [៨២]

ចំពោះទ្រឹស្តីបទទី២នេះ ទុកដូចជាលំហាត់។

និយមន័យទី៤ គេមាន A ជាសំណុំរងនៃលំហតូប៉ូ (X, T) ។ បំណិតនៃ

---

៨១ https://ia800702.us.archive.org/31/items/SchaumsTheoryProblemsOfGeneralTopology/Lipschutz-GeneralTopology.pdf, op. cit., p. 68

៨២ Ibid., p. 68

A តាងដោយ $\overline{A}$ ឬ A^{-} គឺជាប្រសព្វនៃ superset បិទទាំងអស់នៃ A ។[៨៣]
ម្យ៉ាងទៀត បើ $\{F_i : i \in I\}$ ជាថ្នាក់នៃសំណុំរងបិទទាំងអស់នៃ X ដែលផ្ទុក A នោះ $\overline{A} = \bigcap_{i \in I} F_i$ ។

ទ្រឹស្តីបទទី៣ តាង $\overline{A}$ ជាបំណិតនៃសំណុំ A ។ គេបាន៖

ក. $\overline{A}$ ជាសំណុំបិទ។

ខ. បើ F ជា superset បិទនៃ A នោះ $A \subseteq \overline{A} \subseteq F$ ។

គ. សំណុំ A ជាសំណុំបិទ លុះត្រាតែ $A = \overline{A}$ ។

ចំពោះទ្រឹស្តីបទទី៣នេះ ទុកដូចជាលំហាត់។

ឧទាហរណ៍ទី៨ គេឱ្យ $T = \{X, \varnothing, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c,d\}, \{a,b,c,d\}, \{a,b,e\}\}$ ជាតូប៉ូឡូជីលើ $X = \{a,b,c,d,e\}$ ។ រកបំណិតនៃសំណុំ $\{a\}$, $\{b\}$ និង $\{c, e\}$ ។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖
ដោយធាតុទាំងអស់នៃ T ជាសំណុំបើក នោះតាមនិយមន័យនាំឱ្យសំណុំរងបិទទាំងអស់នៃ X ធៀបនឹង T គឺ $\varnothing$, $X, \{b,c,d,e\}, \{c,d,e\}, \{b,e\}, \{e\}$ និង $\{c, d\}$ ។ តាមនិយមន័យ យើងបាន $\overline{\{a\}} = X$, $\overline{\{b\}} = \{b, e\}$ និង $\overline{\{c, e\}} = \{c, d, e\}$ ។

ទ្រឹស្តីបទទី៤ តាង A ជាសំណុំរងនៃលំហតូប៉ូ X ។ នោះគេបានបំណិតនៃ A ជាប្រជុំនៃ A និងសំណុំនៃចំណុចអាគុយរបស់វា មានន័យថា $\overline{A} = A \cup A'$ ។
ចំពោះទ្រឹស្តីបទទី៤នេះ ទុកដូចជាលំហាត់។

និយមន័យទី៥ ចំណុច $p \in X$ ហៅថាជា ចំណុចបំណិត ឬ ចំណុច adherent នៃ $A \subseteq X$ លុះត្រាតែ $p \in \overline{A}$ ។

---

៨៣ https://ia800702.us.archive.org/31/items/SchaumsTheoryProblemsOfGeneralTopology/Lipschutz-GeneralTopology.pdf, op. cit., p. 68

តាមទ្រឹស្ដីបទទី៤ នាំឱ្យ $p \in X$ ជាចំណុចបំណិតនៃ $A \subseteq X$ លុះត្រាតែ $p \in A$ ឬ p ជាចំណុចលីមីតនៃ A ។

ឧទាហរណ៍ទី៩ គេឱ្យសំណុំនៃចំនួនសនិទាន $\mathbb{Q}$ ក្នុងតូប៉ូវិទ្យាធម្មតាសម្រាប់ $\mathbb{R}$ ។ នោះ $\forall a \in \mathbb{R}$ ជាចំណុចលីមីតនៃ $\mathbb{Q}$ ។ ដូចនេះ $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ ។

និយមន័យទី៦ សំណុំរង A នៃលំហតូប៉ូ X ហៅថា ដង់ក្នុង $B \subseteq X$ លុះត្រាតែ B ផ្ទុកក្នុងបំណិតនៃ A មានន័យថា $B \subseteq \overline{A}$ ។ ជាពិសេស សំណុំ A ដង់ក្នុង X ឬសំណុំរងដង់នៃ X លុះត្រាតែ $\overline{A} = X$ ។[៨៤]

ឧទាហរណ៍ទី១០ ពីឧទាហរណ៍ទី៨ យើងមាន $\overline{\{a\}} = X$ និង $\overline{\{c, e\}} = \{c, d, e\}$ ដែល $X = \{a, b, c, d, e\}$ ។ នាំឱ្យសំណុំ $\{a\}$ ជាសំណុំរងដង់នៃ X ប៉ុន្តែ $\{c, e\}$ មិនមែនជាសំណុំរងដង់នៃ X ទេ។

ឧទាហរណ៍ទី១១ ពីឧទាហរណ៍ទី៩ យើងមាន $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ នោះក្នុងតូប៉ូវិទ្យាធម្មតា យើងបាន $\mathbb{Q}$ ជាសំណុំដង់ក្នុង $\mathbb{R}$ ។

៧.៤ ក្នុង ក្រៅ និង ព្រំប្រទល់

និយមន័យទី៧ គេមាន A ជាសំណុំរងនៃលំហតូប៉ូ (X, T) ។

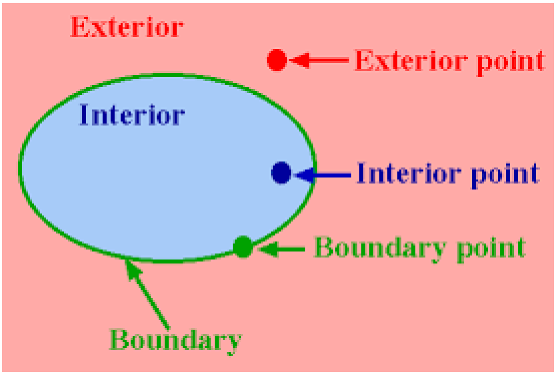
- ចំណុច $p \in A$ ហៅថា ចំណុចក្នុងនៃ A បើ $p \in G_p$ (G_p ជាសំណុំបើក) ដែលមានក្នុង A មានន័យថា $p \in G_p \subseteq A$ ដែល G_p ជាសំណុំបើក ។

- សំណុំនៃចំណុចក្នុងនៃ A តាងដោយ $\operatorname{int}(A)$, $\overset{\circ}{A}$ ឬ A° ហៅថា ក្នុងនៃ A ។
- ក្រៅនៃ A តាងដោយ $\operatorname{ext}(A)$ ជាក្នុងនៃសំណុំរងបំពេញនៃ A^c មានន័យថា $\operatorname{int}(A^c)$ ។

---

៨៤ https://ia800702.us.archive.org/31/items/SchaumsTheoryProblemsOfGeneralTopology/Lipschutz-GeneralTopology.pdf, op. cit., p. 69

- ព្រំប្រទល់នៃ A តាងដោយ $b(A)$ ជាសំណុំនៃចំណុចដែលមិនមែនជារបស់ក្នុងឬក្រៅនៃ A ។[៨៥]



រូបទី២៩

ឧទាហរណ៍ទី១២ គេមានចន្លោះ $[a , b]$, (a , b) , $[a , b)$ និង $(a , b]$ ដែលចំណុចចុងគឺ a និង b ។ រកក្នុង ក្រៅ និង ព្រំប្រទល់នៃចន្លោះនីមួយៗ។

យើងមានដំណោះស្រាយរកតែក្នុង ក្រៅ និង ព្រំប្រទល់នៃចន្លោះ $A=[a , b]$ ប៉ុណ្ណោះ ចំណែកឯចន្លោះបីទៀត ទុកជាលំហាត់។

យើងបាន $\forall p \in (a , b)$, p ជាចំណុចក្នុងនៃ A ពីព្រោះ $\exists S_p=(a , b)$ ដែល $S_p \subseteq A$ ។

ចំពោះ $p=a$ ឬ $p=b$ នោះ p មិនមែនជាចំណុចក្នុងនៃ A ទេ ពីព្រោះ

$\forall \varepsilon > 0 , S_a=(a-\varepsilon , a+\varepsilon) \not\subset A \vee S_b=(b-\varepsilon , b+\varepsilon) \not\subset A$ ។

នាំឱ្យ $\operatorname{int}(A)=(a,b)$ ។

ម្យ៉ាងទៀត

$\operatorname{ext}(A)=\operatorname{int}(A^c)=\operatorname{int}((-\infty,a)\cup(b,+\infty))=(-\infty,a)\cup(b,+\infty)$

ហើយ $b(A)=\{a,b\}$ ។

---

[៨៥] https://ia800702.us.archive.org/31/items/SchaumsTheoryProblemsOfGeneralTopology/Lipschutz-GeneralTopology.pdf, op. cit., p. 69, 70

ឧទាហរណ៍ទី១៣ គេឱ្យ $T=\{X,\varnothing,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e\}\}$ ជាតូប៉ូវិទ្យាលើ $X=\{a,b,c,d,e\}$ និងសំណុំរង $A=\{b,c,d\}$ នៃ X ។
គណនា $\mathrm{int}(A)$, $\mathrm{ext}(A)$ និង $b(A)$ ។
ចំពោះឧទាហរណ៍ទី១៣នេះ ទុកជាលំហាត់។

ទ្រឹស្តីបទទី៥ តាង A ជាសំណុំរងណាមួយនៃលំហតូប៉ូ X ។ នោះគេបាន $\overline{A}=\mathrm{int}(A)\cup b(A)$ ។

៧.៥ តូប៉ូវិទ្យាបិទរាប់អស់

និយមន័យទី៨ សំណុំរង S នៃលំហតូប៉ូ (X, T) ជា Clopen ប្រសិនបើវាជាសំណុំបើកផងនិងបិទផងក្នុង (X, T) ។

ឧទាហរណ៍ទី១៤ ក. ក្នុងគ្រប់លំហតូប៉ូ (X, T) នោះសំណុំ X និង $\varnothing$ ជា Clopen ។

ខ. ក្នុងលំហឌីសក្រេត សំណុំរងទាំងអស់នៃ X ជា Clopen ។

គ. ក្នុងលំហអាំងឌីសក្រេត សំណុំរង Clopen តែពីរគត់គឺ X និង $\varnothing$ ។

និយមន័យទី៩ គេឱ្យ X ជាសំណុំមិនទទេណាមួយ។ តូប៉ូវិទ្យា T លើ X ហៅថា តូប៉ូវិទ្យាបិទរាប់អស់ ឬ Cofinite topology ប្រសិនបើសំណុំរងបិទនៃ X ជា X និងសំណុំរងរាប់អស់ទាំងអស់នៃ X មានន័យថា សំណុំបើកជា $\varnothing$ និងសំណុំរងទាំងអស់នៃ X ដែលមានសំណុំរងបំពេញរាប់អស់។ [៨៦]

សម្គាល់ ១. ក្នុងតូប៉ូវិទ្យាបិទរាប់អស់ នោះសំណុំរាប់អស់ទាំងអស់ ជាសំណុំបិទ។

២. គ្រប់សំណុំរាប់អស់ ជាសំណុំបិទ តែមិនមែនគ្រប់សំណុំអនន្ត ជាសំណុំបើកទេ។

---

[៨៦] http://www.topologywithouttears.net/topbook.pdf, p. 37

ឧទាហរណ៍ទី១៥ តាង $\mathbb{N}=\{1, 2, 3, ...\}$ និងតាង T ជាសំណុំដែលមានធាតុ $\varnothing$ និងសំណុំរងនីមួយៗ S នៃ $\mathbb{N}$ ដែលសំណុំរងបំពេញនៃ S ក្នុង $\mathbb{N}$ ជាសំណុំរាប់អស់។

ក. បង្ហាញថា T ជាតូប៉ូវិទ្យាលើ $\mathbb{N}$ ។

ខ. ចំពោះ $n\in\mathbb{N}$ គេកំណត់សំណុំ

$S_n=\{1\}\cup\{n+1\}\cup\{n+2\}\cup\{n+3\}\cup...$។ បង្ហាញថា S_n ជាសំណុំបើក តែ $\bigcap_{n=1}^{+\infty} S_n$ មិនមែនជាសំណុំបើកទេ។

គ. បង្ហាញថា T ជាតូប៉ូវិទ្យាបិទរាប់អស់ ។

ចំពោះឧទាហរណ៍ទី១៥នេះ ទុកជាលំហាត់។

៧.៦ វរស៊ីណាសនិងប្រព័ន្ធវរស៊ីណាស

និយមន័យទី១០ គេមាន (X, T) ជាលំហតូប៉ូ និង $p\in X$ ។ គេថា N_p ជា វរស៊ីណាសនៃចំណុច p កាលណា $\exists\, G_p\in T$ ដែល $p\in G_p\subseteq N_p$ សមមូល p ជាចំណុចក្នុងនៃ N_p ($p\in \operatorname{int}(N_p)$)។ ថ្នាក់នៃវរស៊ីណាសទាំងអស់ ឬគ្រួសារវរស៊ីណាសនៃចំណុច $p\in X$ តាងដោយ $\mathcal{N}_p$ ហៅថា ប្រព័ន្ធវរស៊ីណាសនៃ p ។[៨៧]

បើ G ជាសំណុំបើកដែលផ្ទុកចំណុច $p\in X$ នោះ G ហៅថាជា វរស៊ីណាសបើកនៃ p ហើយ G គ្មាន p មានន័យថា $G\setminus\{p\}$ ហៅថាជា វរស៊ីណាសបើកលុបនៃ p ។

ឧទាហរណ៍ទី១៦ គេឱ្យ $a\in\mathbb{R}$ ។ ចន្លោះបិទ $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ ជាវរស៊ីណាសនៃ a ។

---

៨៧ https://ia800702.us.archive.org/31/items/SchaumsTheoryProblemsOfGeneralTopology/Lipschutz-GeneralTopology.pdf, op. cit., p. 70

ឧទាហរណ៍ទី១៧ បើ p ជាចំណុចនៃប្លង់ $\mathbb{R}^2$ នោះគ្រប់ថាសបិទ $\{q\in\mathbb{R}^2 : d(p,q)\le r\ne 0\}$ ជាវស៊ីណាសនៃ p ។

ឧទាហរណ៍ទី១៨ ចន្លោះបិទ $[0\,,1]$ ក្នុង $\mathbb{R}$ ជាវស៊ីណាសនៃចំណុច $\dfrac{1}{2}$ ។

ឧទាហរណ៍ទី១៩ ចន្លោះ $(0\,,1]$ ក្នុង $\mathbb{R}$ ជាវស៊ីណាសនៃចំណុច $\dfrac{1}{4}$ ប៉ុន្តែ $(0\,,1]$ មិនមែនជាវស៊ីណាសនៃចំណុច 1 ទេ។

ឧទាហរណ៍ទី២០ បើ (X, T) ជាលំហតូប៉ូណាមួយ និង $G_p\in T$ នោះតាមនិយមន័យ G_p ជាវស៊ីណាសនៃគ្រប់ចំណុច p ហើយនាំឱ្យគ្រប់ចន្លោះបើក $(a\,,b)$ ក្នុង $\mathbb{R}$ ជាវស៊ីណាសនៃគ្រប់ចំណុចដែលផ្ទុកវា។

ឧទាហរណ៍ទី២១ គេឱ្យ (X, T) ជាលំហតូប៉ូ និង M ជាវស៊ីណាសនៃចំណុច p ។ បើ S ជាសំណុំរងណាមួយនៃ X ដែល $M\subseteq S$ នោះ S ជាវស៊ីណាសនៃចំណុច p ។

ទ្រឹស្តីបទទី៦

ក. $\mathcal{N}_p$ ជាថ្នាក់មិនទទេ និង p ជារបស់នៃធាតុនីមួយៗនៃ $\mathcal{N}_p$ ។

ខ. ប្រសព្វនៃធាតុពីរណាក៏ដោយនៃ $\mathcal{N}_p$ ជារបស់នៃ $\mathcal{N}_p$ ។

ចំពោះទ្រឹស្តីបទទី៦នេះ ទុកជាលំហាត់។

៧.៧ ស្វ៊ីតរួម

និយមន័យទី១១ ស្វ៊ីត $\langle a_1, a_2, a_3, ...\rangle$ នៃចំណុចក្នុងលំហតូប៉ូ (X, T) រួមរកចំណុច $b\in X$ ឬ b ជាលីមីតនៃស្វ៊ីត $\langle a_n\rangle$ កំណត់ដោយ $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = b$ ឬ $a_n\to b$ លុះត្រាតែ ចំពោះសំណុំបើក G នីមួយៗផ្ទុក b, $\exists n_0\in\mathbb{N}$ ដែល

$n > n_0 \Rightarrow a_n \in G$ មានន័យថា G ផ្ទុកតួនៃស្វ៊ីតស្ទើរតែទាំងអស់។ [៨៨]

ឧទាហរណ៍ទី២២ គេឱ្យ $\langle a_1, a_2, a_3, \ldots \rangle$ ជាស្វ៊ីតនៃចំណុចក្នុងលំហតូប៉ូអាំងឌីសក្រេត $(X, \mathscr{T})$។ យើងមាន៖

១. X ជាសំណុំបើកដែលផ្ទុកចំណុច $b \in X$ ណាមួយ។

២. X ផ្ទុកគ្រប់តួនៃស្វ៊ីត $\langle a_n \rangle$។

តាមនិយមន័យ នាំឱ្យស្វ៊ីត $\langle a_1, a_2, a_3, \ldots \rangle$ រួមរកគ្រប់ចំណុច $b \in X$។

ឧទាហរណ៍ទី២៣ តាង $\langle a_1, a_2, a_3, \ldots \rangle$ ជាស្វ៊ីតនៃចំណុចក្នុងលំហតូប៉ូឌីសក្រេត $(X, \mathscr{D})$។ តើមានលក្ខខណ្ឌអ្វី ដើម្បីឱ្យស្វ៊ីតនេះរួម?
ចំពោះឧទាហរណ៍ទី២៣នេះ ទុកជាលំហាត់។

៧.៨ តូប៉ូវិទ្យាធៀប និង លំហរង

និយមន័យទី១២ តាង A ជាសំណុំរងមិនទទេនៃលំហតូប៉ូ (X, T)។ ថ្នាក់ T_A នៃអន្តរផ្នែកទាំងអស់នៃ A ជាមួយនិងសំណុំរង $T-$បើកនៃ X គឺជាតូប៉ូវិទ្យាលើ A។ វាហៅថាជា តូប៉ូវិទ្យាធៀបលើ A ឬ relativization នៃ T ធៀបនឹង A ហើយលំហតូប៉ូ (A, T_A) ហៅថាជា លំហរងនៃ (X, T)។ ម្យ៉ាងទៀត សំណុំរង H នៃ A ជាសំណុំ T_A-បើក មានន័យថា វាជាសំណុំបើកធៀបនឹង A លុះត្រាតែ មានសំណុំរង $T-$បើក G នៃ X ដែល $H = G \cap A$។ [៨៩]

ឧទាហរណ៍ទី២៤ គេឱ្យ $T = \{X, \varnothing, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$ ជាតូប៉ូវិទ្យាលើសំណុំ $X = \{a, b, c, d, e\}$ និងសំណុំរង $A = \{a, d, e\}$ នៃ X។ បង្ហាញថា (A, T_A) ជាលំហរងនៃ (X, T)។

---

[៨៨] https://ia800702.us.archive.org/31/items/SchaumsTheoryProblemsOfGeneralTopology/Lipschutz-GeneralTopology.pdf, op. cit., p. 71

[៨៩] Ibid., p. 72

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖

យើងមាន $X \cap A = A$, $\{a\} \cap A = \{a\}$, $\{a, c, d\} \cap A = \{a, d\}$, $\{c, d\} \cap A = \{d\}$, $\varnothing \cap A = \varnothing$, $\{b, c, d, e\} \cap A = \{d, e\}$ ។ តាមនិយមន័យ នាំឱ្យ $T_A = \{A, \varnothing, \{a\}, \{d\}, \{a, d\}, \{d, e\}\}$ ដែលជាតូប៉ូវិទ្យាលើ A ឬជាតូប៉ូវិទ្យាធៀបលើ A ។ ដូចនេះ យើងបាន (A, T_A) ជាលំហរងនៃ (X, T) ។

ឧទាហរណ៍ទី២៥ គេឱ្យតូប៉ូវិទ្យា

$$T = \{X, \varnothing, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e\}\}$$

លើសំណុំ $X = \{a, b, c, d, e\}$ ។

ក. ចូរកំណត់ T_B លើសំណុំ $B = \{a, c, e\}$ ។

ខ. បង្ហាញថា T_B ជាតូប៉ូវិទ្យាលើ B ។

គ. តើយើងសង្កេតឃើញយ៉ាងណាចំពោះសំណុំ $\{a, c\}$ ក្នុង X និងក្នុង B ?

ចំពោះឧទាហរណ៍ទី២៥នេះ ទុកជាលំហាត់។

៧.៩ អនុគមន៍ជាប់

និយមន័យទី១៣ គេថា $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ចំណុច x_0 លុះត្រាតែ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់៖

បើ $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$ ។[៩០]

គេថា f ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $\mathbb{R}^n$ កាលណា វាជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់គ្រប់ចំណុច $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ។

ឧទាហរណ៍ទី២៦ អនុគមន៍ $f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^3 + 2x_2^2 + 5x_3$ ពីសំណុំ $\mathbb{R}^3$ ទៅ $\mathbb{R}$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ចំណុច $(1, 2, 3)$ ។

---

[៩០] http://www.math.colostate.edu/~renzo/teaching/Topology10/Notes.pdf, p. 13

និយមន័យទី១៤ គេឱ្យ (X, T) និង (Y, T^*) ជាលំហតូប៉ូ។ អនុគមន៍ f ពីសំណុំ X ទៅសំណុំ Y ជាអនុគមន៍ជាប់ធៀបទៅនឹង T និង T^* ឬ ជាអនុគមន៍ជាប់ $T-T^*$ ឬ ជាអនុគមន៍ជាប់ លុះត្រាតែ រូបភាពច្រាស $f^{-1}(H)$ នៃគ្រប់សំណុំរង T^*-បើក H នៃ Y ជាសំណុំរង $T-$បើក H នៃ X មានន័យថា $H \in T^* \Rightarrow f^{-1}(H) \in T$ ។[៩១]

យើងនឹងសរសេរ $f:(X, T) \to (Y, T^*)$ សម្រាប់អនុគមន៍ f ពីសំណុំ X ទៅសំណុំ Y ដែលទាក់ទងនឹងតូប៉ូវិទ្យា។

ឧទាហរណ៍ទី២៧ គេឱ្យ $f: X \to Y$ ជាអនុគមន៍ថេរ មានន័យថា $f(x) = p \in Y$ ចំពោះ $\forall x \in X$ ។ បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍ជាប់ធៀបទៅនឹងតូប៉ូវិទ្យា T លើ X និងតូប៉ូវិទ្យា T^* លើ Y ។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖

យើងចាំបាច់បង្ហាញថា រូបភាពច្រាសនៃសំណុំរង T^*-បើកនៃ Y ជាសំណុំរង $T-$បើកនៃ X ។

យើងតាង $H \in T^*$ ។

ដោយ $f(x) = p$ ចំពោះ $\forall x \in X$ នាំឱ្យ $f^{-1}(H) = \begin{cases} X & , p \in H \\ \varnothing & , p \notin H \end{cases}$ ។

ម្យ៉ាងទៀត $\varnothing, X \in T$ នាំឱ្យ $\varnothing$ និង X ជាសំណុំបើក។

នាំឱ្យ $f^{-1}(H)$ ជាសំណុំរងបើកនៃ X ។

ដូចនេះ តាមនិយមន័យយើងបាន $f:(X, T) \to (Y, T^*)$ ជាអនុគមន៍ជាប់។

---

៩១ https://ia800702.us.archive.org/31/items/SchaumsTheoryProblemsOfGeneralTopology/Lipschutz-GeneralTopology.pdf, op. cit., p. 97

ទ្រឹស្តីបទទី៧ អនុគមន៍ $f: X \to Y$ ជាអនុគមន៍ជាប់ លុះត្រាតែ ចម្រាសនៃធាតុនីមួយៗនៃគោល $\mathscr{B}$ ចំពោះ Y ជាសំណុំរងបើកនៃ X ។[៩២]

សម្គាល់ តាង (X, T) ជាលំហតូប៉ូ។ ថ្នាក់ $\mathscr{B}$ នៃសំណុំរងបើកនៃ X មានន័យថា $\mathscr{B} \subseteq T$ ជាគោលមួយចំពោះតូប៉ូវិទ្យា T លុះត្រាតែ

១. គ្រប់សំណុំបើក $G \in T$ ជាប្រជុំនៃធាតុនៃ $\mathscr{B}$ ។

២. ឬចំពោះចំណុច p ណាមួយ ជារបស់សំណុំបើកG, $\exists\, B \in \mathscr{B}$ ដែល $p \in B \subseteq G$ ។

ទ្រឹស្តីបទទី៨ តាង $\mathscr{S}$ ជាគោលរងចំពោះលំហតូប៉ូ Y ។ នោះគេបានអនុគមន៍ $f: X \to Y$ ជាអនុគមន៍ជាប់ លុះត្រាតែ ចម្រាសនៃធាតុនីមួយៗនៃ $\mathscr{S}$ ជាសំណុំរងបើកនៃ X ។[៩៣]

សម្គាល់ តាង (X, T) ជាលំហតូប៉ូ។ ថ្នាក់ $\mathscr{S}$ នៃសំណុំរងបើកនៃ X មានន័យថា $\mathscr{S} \subseteq T$ ជាគោលរងចំពោះតូប៉ូវិទ្យា T លើ X លុះត្រាតែ ប្រសព្វរាប់អស់នៃធាតុនៃ $\mathscr{S}$ បង្កើតជាគោលចំពោះ T ។

និយមន័យទី១៥ តាង X ជាលំហតូប៉ូ។ ចំណុច $p \in X$ ជាចំណុចបិទសេរីទៅនឹងសំណុំ $A \subseteq X$ លុះត្រាតែ $p \in A$ ឬ p ជាចំណុចអាគុយនៃ A ។[៩៤]

ទ្រឹស្តីបទទី៩ អនុគមន៍ $f: X \to Y$ ជាអនុគមន៍ជាប់ លុះត្រាតែ ចំពោះ $p \in X$ និង $A \subseteq X$ បើ p ជាចំណុចបិទសេរីទៅនឹង A នាំឱ្យ $f(p)$ ជាចំណុចបិទសេរីទៅនឹង $f(A)$ មានន័យថា $p \in \overline{A} \Rightarrow f(p) \in \overline{f(A)}$ គឺថា

---

[៩២] https://ia800702.us.archive.org/31/items/SchaumsTheoryProblemsOfGeneralTopology/Lipschutz-GeneralTopology.pdf, op. cit., p. 97

[៩៣] Ibid., p. 97

[៩៤] Ibid., p. 98

$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ ។

ទ្រឹស្តីបទទី១០ អនុគមន៍ $f: X \to Y$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ចំណុច $p \in X$ លុះត្រាតែ រូបភាពច្រាស $f^{-1}(H)$ នៃគ្រប់សំណុំបើក $H \subseteq Y$ ដែលផ្ទុក $f(p)$ ជា superset នៃសំណុំបើក $G \subseteq X$ ដែលផ្ទុក p លុះត្រាតែ រូបភាពច្រាសនៃគ្រប់វស៊ីណាសនៃ $f(p)$ ជាវស៊ីណាសនៃ p ។

ទ្រឹស្តីបទទី១១ គេឱ្យ X និង Y ជាលំហតូប៉ូ។ នោះគេបានអនុគមន៍ $f: X \to Y$ ជាអនុគមន៍ជាប់ លុះត្រាតែ វាជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់គ្រប់ចំណុចនៃ X ។

៧.១០ លំហអូមេអូម៉ូភិក

និយមន័យទី១៦ លំហតូប៉ូពីរ X និង Y ហៅថាជា លំហអូមេអូម៉ូភិក ឬ លំហសមមូលតូប៉ូ លុះត្រាតែ មានអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ $f: X \to Y$ ដែល f និង f^{-1} ជាអនុគមន៍ជាប់។ អនុគមន៍ f នេះហៅថាជា អូមេអូម៉ូហ្វីស។ [៩៥]
អនុគមន៍ $f: X \to Y$ ហៅថាជា អនុគមន៍ទ្វេជាប់ លុះត្រាតែ f ជាអនុគមន៍បើកនិងជាប់។ នោះ $f: X \to Y$ ជាអូមេអូម៉ូហ្វីស លុះត្រាតែ f ជាអនុគមន៍ទ្វេជាប់និងមួយទល់មួយ។

និយមន័យទី១៧ អូមេអូម៉ូហ្វីស ជាអនុគមន៍ $f: X \to Y$ រវាងលំហតូប៉ូពីរ X និង Y ដែល f ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយនិងជាប់ ហើយ f មានអនុគមន៍ច្រាសជាប់ f^{-1} ។ [៩៦]

---

[៩៥] https://ia800702.us.archive.org/31/items/SchaumsTheoryProblemsOfGeneralTopology/Lipschutz-GeneralTopology.pdf, op. cit., p. 100

[៩៦] http://www.math.colostate.edu/~renzo/teaching/Topology10/Notes.pdf, op. cit., p. 14

និយមន័យទី១៨ លំហតូប៉ូពីរ X និង Y ហៅថាជា លំហអូមេអូម៉ភិក បើមានអនុវត្តន៍ជាប់ $f : X \to Y$ និង $g : Y \to X$ ដែល $f \circ g = i_Y$ និង $g \circ f = i_X$ ។ ជាងនេះទៀត អនុវត្តន៍ f និង g ជាអូមេអូម៉ហ្វីសនិងចម្រាសគ្នាទៅវិញទៅមក ហើយគេអាចសរសេរ f^{-1} ជំនួស g និង g^{-1} ជំនួស f ។ [៩៧]

សម្គាល់ ក្នុងជំពូកទី៧នេះ សន្មតថា អនុគមន៍ $f : X \to Y$ ជាអនុវត្តន៍។ ហេតុនេះ អនុវត្តន៍មួយទល់មួយនិងអនុគមន៍មួយទល់មួយ គឺមានន័យតែមួយ។ ស្រដៀងគ្នាដែរ ចំពោះអនុគមន៍ជាប់និងអនុវត្តន៍ជាប់ ហើយ អនុគមន៍ច្រាសនិងអនុវត្តន៍ច្រាស។

រូបទី៣០៖ អូមេអូម៉ហ្វីសរវាងនំដុងណាត់និងកែវកាហ្វេ [៩៨]

ឧទាហរណ៍ទី២៨ បង្ហាញថា $X = (-1, 1)$ អូមេអូម៉ភិកទៅនឹង $Y = (0 , 5)$ ។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖

យើងតាងអនុវត្តន៍ $f : X \to Y$ កំណត់ដោយ $f(x) = \frac{5}{2}(x+1)$ ។

វាជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយនិងជាប់។ ជាងនេះទៀត f^{-1} មាននិងជាប់ដែល

---

៩៧ http://www.math.colostate.edu/~renzo/teaching/Topology10/Notes.pdf, op. cit., p. 15

៩៨ Ibid., p. 15

$f^{-1}(x)=\frac{2}{5}x-1$ ។

នាំឱ្យ $f: X \to Y$ ជាអូមេអូម៉ូហ្វីស ។

ដូចនេះ យើងបាន $X=(-1, 1)$ អូមេអូម៉ូភិកទៅនឹង $Y=(0\ , 5)$ ។

ឧទាហរណ៍ទី២៩ បង្ហាញថា សំណុំ $X=(-1, 1)$ និង $\mathbb{R}$ ជាលំហអូមេអូម៉ូភិក។ ចំពោះឧទាហរណ៍ទី២៩នេះ ទុកជាលំហាត់។

ទ្រឹស្តីបទទី១២ ទំនាក់ទំនងក្នុងបណ្តុំណាមួយនៃលំហតូប៉ូកំណត់ដោយ « X អូមេអូម៉ូភិកទៅនឹង Y » ជាទំនាក់ទំនងសមមូល។

ទ្រឹស្តីបទទី១៣ បើអនុគមន៍ $f: X \to Y$ ជាអូមេអូម៉ូហ្វីស និងអនុគមន៍ $g: Y \to Z$ ជាអូមេអូម៉ូហ្វីសមួយទៀត នោះគេបានបណ្តាក់ $g \circ f: X \to Z$ ជាអូមេអូម៉ូហ្វីស។ [៩៩]

៧.១១ លំហមេទ្រិក

និយមន័យទី១៩ មេទ្រិកលើសំណុំ X មួយ ជាអនុវត្តន៍ $d: X \times X \to \mathbb{R}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់៖ [១០០]

១. $d(x, y) \geq 0$ ចំពោះគ្រប់ $x, y \in X$

២. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

៣. $d(x, y) = d(y, x)$ ចំពោះគ្រប់ $x, y \in X$

៤. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ ចំពោះគ្រប់ $x, y, z \in X$ (វិសមភាពត្រីកោណ)។

---

[៩៩] http://www.math.colostate.edu/~renzo/teaching/Topology10/Notes.pdf, op. cit., p. 18

[១០០] http://cseweb.ucsd.edu/~gill/CILASite/Resources/17AppABCbib.pdf, p. 680

ចំនួនពិត $d(x,y)$ ជាចម្ងាយរវាង x និង y ហើយសំណុំ X ភ្ជាប់ជាមួយមេទ្រិក d ហៅថាជា លំហមេទ្រិក (X,d) ។

ឧទាហរណ៍ទី៣០ សំណុំ $\mathbb{R}$ រួមជាមួយអនុវត្តន៍ $d_1(x,y)=|x-y|$ ជាលំហាមេទ្រិក។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖

១. ចំពោះគ្រប់ $x,y\in\mathbb{R}$ នាំឱ្យ $d_1(x,y)=|x-y|\geq 0$ ពីព្រោះ $u\in\mathbb{R}\ ,|u|\geq 0$ ។

២. យើងបាន

$$d_1(x,y)=0 \Leftrightarrow |x-y|=0 \Leftrightarrow x-y=0 \Leftrightarrow x=y \text{ ។}$$

៣. ចំពោះគ្រប់ $x,y\in\mathbb{R}$ នាំឱ្យ

$$d_1(x,y)=|x-y|=|-(y-x)|=|y-x|=d_1(y,x) \text{ ។}$$

៤. យើងមាន $|u+v|\leq|u|+|v|$ ចំពោះគ្រប់ $u,v\in\mathbb{R}$ ។ នាំឱ្យចំពោះគ្រប់ $x,\ y,\ z\in\mathbb{R}$ យើងបាន៖

$$|x-z|=|(x-y)+(y-z)|\leq|x-y|+|y-z|$$

ឬ $d_1(x,z)\ \leq\ d_1(x,y)+d_1(y,z)$ ។

ដូចនេះ យើងបានគូ $(\mathbb{R}\ ,\ d_1)$ ជាលំហមេទ្រិក។

ឧទាហរណ៍ទី៣១ ឧបមាថា f និង g ជាអនុគមន៍ក្នុងលំហ $X=\{f\ :\ [0\ ,1]\to\mathbb{R}\}$ ។ តើ $d(f\ ,\ g)=\max|f-g|$ ជាមេទ្រិកដែរឬទេ ?

ឧទាហរណ៍ទី៣២ ប្លង់ $\mathbb{R}^2$ រួមជាមួយអនុវត្តន៍

$$d_2((x_1,y_1),\ (x_2,y_2))=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

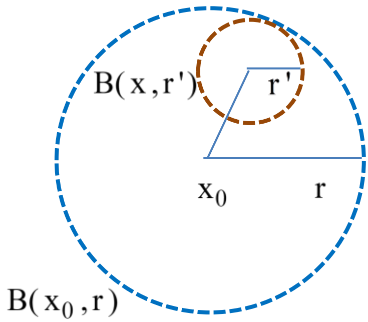
ជាលំហមេទ្រិក។

ចំពោះឧទាហរណ៍ទី៣១និង៣២នេះ ទុកជាលំហាត់។

និយមន័យទី២០ គេឱ្យលំហមេទ្រិក (X, d) និងចំនួនពិត $r > 0$។ ប៊ូល បើកមានកាំ r និងផ្ចិត $x_0 \in X$ គឺជាសំណុំ $B_d(x_0, r)$ ឬ $B(x_0, r) \subseteq X$ កំណត់ដោយ $B(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) < r\}$។[១០១] ប៊ូលបិទ $\overline{B}(x_0, r) \subseteq X$ មានកាំ r និងផ្ចិត $x_0 \in X$ គឺជាសំណុំ $\overline{B}(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) \leq r\}$។

និយមន័យទី២១ គេឱ្យ (X, d) ជាលំហមេទ្រិក។ សំណុំរង $A \subseteq X$ ជាសំណុំបើក បើចំពោះគ្រប់ចំណុច $x \in A, \exists r > 0$ និងប៊ូលបើក $B(x, r)$ ដែល $B(x, r) \subseteq A$។ ចំណែកឯ $B \subseteq X$ ជាសំណុំបិទ បើ $B^c = X \setminus B$ ជាសំណុំបើក។

ទ្រឹស្តីបទទី១៤ គេឱ្យ (X, d) ជាលំហមេទ្រិក។ នោះគេបានគ្រប់ប៊ូលបើកជាសំណុំបើក។



រូបទី៣១៖ ការបង្ហាញពីប៊ូលបើក ជាសំណុំបើក

ទ្រឹស្តីបទទី១៥ គេឱ្យ (X, d) ជាលំហមេទ្រិក។ នោះគេបាន៖[១០២]

ក. សំណុំ $\varnothing$ និង X ជាសំណុំបើក។

ខ. ប្រសព្វរាប់អស់នៃសំណុំបើក ជាសំណុំបើក។

---

[១០១] http://cseweb.ucsd.edu/~gill/CILASite/Resources/17AppABCbib.pdf, op. cit., p. 681

[១០២] Ibid., p. 682

គ. ប្រជុំរាប់អស់ឬអនន្តធាតុនៃសំណុំបើក ជាសំណុំបើក។

ទ្រឹស្តីបទទី១៦ សំណុំរង A នៃលំហមេទ្រិក (X, d) ជាសំណុំបើក លុះត្រាតែ វាជាប្រជុំនៃប៊ូលបើក។

ទ្រឹស្តីបទទី១៧ គេឱ្យ (X, d) ជាលំហមេទ្រិក។ នោះគេបានគ្រប់ប៊ូលបិទជាសំណុំបិទ។

និយមន័យទី២២ បើ (X, d) ជាលំហមេទ្រិក និង $Y \subseteq X$ នោះ Y ជាលំហមេទ្រិកផងដែរជាមួយមេទ្រិក d ដូចគ្នាដែលប្រើលើ X ។ ម្យ៉ាងទៀត បើយើងតាង $d|Y$ ជាមេទ្រិក d បង្រួមទៅចំណុចទាំងឡាយក្នុង Y នោះលំហ $(Y, d|Y)$ ហៅថាជា លំហរងនៃលំហមេទ្រិក (X, d) ។ [១០៣]

ទ្រឹស្តីបទទី១៨ គេឱ្យ (X, d) ជាលំហមេទ្រិក និង $(Y, d|Y)$ ជាលំហរងមេទ្រិកនៃ X ។ នោះគេបានសំណុំរង $W \subseteq Y$ ជាសំណុំបើកក្នុង Y លុះត្រាតែ $W = Y \cap A$ ដែល A ជាសំណុំបើកក្នុង X ។

និយមន័យទី២៣ គេឱ្យ $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ ជាអនុវត្តន៍។ គេថា f ជាអនុវត្តន៍ជាប់ត្រង់ $x_0 \in X$ បើគេឱ្យ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ ដែល
$d_X(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ ចំពោះ $\forall x \in X$ និង $d_Y(x, x_0) < \delta$
ឬបើចំពោះគ្រប់ $B(f(x_0), \varepsilon)$ មាន $B(x_0, \delta)$ ដែល
$f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon)$ ។
បើ f កំណត់លើសំណុំរង $S \subseteq X$ នោះ f ហៅថាជា អនុវត្តន៍ជាប់លើ S លុះត្រាតែ វាជាអនុវត្តន៍ជាប់ត្រង់គ្រប់ចំណុចនៃ S ។ [១០៤]

---

[១០៣] http://cseweb.ucsd.edu/~gill/CILASite/Resources/17AppABCbib.pdf, op. cit., p. 683, 684

[១០៤] Ibid., p. 684, 685

ទ្រឹស្តីបទទី១៩ គេឱ្យ $f:(X, d_X) \to (Y, d_Y)$ ជាអនុវត្តន៍។ នោះគេបាន f ជាអនុវត្តន៍ជាប់ លុះត្រាតែ $f^{-1}(A)$ ជាសំណុំបើកក្នុង X ចំពោះគ្រប់សំណុំបើក A ក្នុង Y ។ [១០៥]

ទ្រឹស្តីបទទី២០ គេឱ្យ $f:(X, d_X) \to (Y, d_Y)$ ជាអនុវត្តន៍។ នោះគេបាន f ជាអនុវត្តន៍ជាប់ លុះត្រាតែ $f^{-1}(F)$ ជាសំណុំបិទក្នុង X នៅពេលដែល F ជាសំណុំបិទក្នុង Y ។

សម្គាល់ បើ $f:X \to Y$ ជាអនុវត្តន៍ជាប់ និង $A \subseteq Y$ ជាសំណុំបើក នោះគេបាន $f^{-1}(A)$ ជាសំណុំបើក ប៉ុន្តែបើ $B \subseteq X$ ជាសំណុំបើក នោះវាមិនពិតទេថា $f(B)$ ជាសំណុំបើក។

---

[១០៥] http://cseweb.ucsd.edu/~gill/CILASite/Resources/17AppABCbib.pdf, op. cit., p. 685

លំហាត់លំហាតូប៉ូ និង លំហាមេទ្រិក

១- គេឱ្យ $X=\{1, 2, 3\}$ និង $T=\{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \emptyset\}$ ។ បង្ហាញថា (X, T) ជាលំហាតូប៉ូ។

២- កំណត់រកតូប៉ូឡូជីលើសំណុំ X ដែលមានផ្នុកសំណុំរងពីរនៃ X ។

៣- តាង $\mathcal{U}$ ជាថ្នាក់នៃសំណុំបើកទាំងអស់នៃចំនួនពិត។ បង្ហាញថា $\mathcal{U}$ ជាតូប៉ូឡូជីមួយលើ $\mathbb{R}$ ។

៤- គេឱ្យ $T=\{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$ ជាតូប៉ូឡូជីលើ $X=\{a, b, c, d, e\}$ និង $A=\{c, e\}$ ។ ចូរកំណត់រក A' ។

៥- តាង X ជាសំណុំណាមួយ និង $\mathcal{P}(X)$ ជាគ្រួសារនៃសំណុំរងទាំងអស់នៃ X ។ បង្ហាញថា $\mathcal{P}(X)$ ជាតូប៉ូឡូជីលើ X ។

៦- បង្ហាញថា $T=\{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e\}\}$ ជាតូប៉ូឡូជីលើ $X=\{a, b, c, d, e\}$ ។

៧- គេឱ្យ $\mathcal{F}=\{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e\}\}$ ជាតូប៉ូឡូជីលើ $X=\{a, b, c, d, e\}$ ។ រកបំណិតនៃសំណុំ $\{a, b\}$ និង $\{c, d, e\}$ ។

៨- គេឱ្យ $X=\{a, b, c, d, e, f\}$ និង
$T_1=\{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e, f\}\}$ ។

ក. បង្ហាញថា T_1 ជាតូប៉ូឡូជីលើ X ។

ខ. បង្ហាញថា $\{a\}$ ជាសំណុំបើកផងនិងបិទផង។

គ. បង្ហាញថា $\{b, c\}$ មិនមែនជាសំណុំបើកនិងមិនមែនជាសំណុំបិទទេ។

ឃ. បង្ហាញថា $\{c, d\}$ ជាសំណុំបើក តែមិនមែនជាសំណុំបិទទេ។

ង. បង្ហាញថា $\{a, b, e, f\}$ ជាសំណុំបិទ តែមិនមែនជាសំណុំបើកទេ។

៩- គេឱ្យ $T = \{X, \varnothing, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e\}\}$ ជាតូប៉ូវិទ្យាលើ $X = \{a,b,c,d,e\}$ និងសំណុំរង $B = \{a, b, c, d\}$ នៃ X ។ គណនា $\text{int}(B)$, $\text{ext}(B)$ និង $b(B)$ ។

១០- គេឱ្យ $\{\mathcal{F}_i : i \in I\}$ ជាថ្នាក់នៃតូប៉ូវិទ្យាលើសំណុំ X មួយ។ បង្ហាញថា $\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$ តូប៉ូវិទ្យាលើ X ។

១១- គេមាន $(X, \mathcal{T})$ ជាលំហតូប៉ូណាមួយ។ នោះគេបាន៖

ក. សំណុំ X និង $\varnothing$ ជាសំណុំបើក។

ខ. ប្រជុំរាប់អស់ឬអនន្តជាតុនៃសំណុំបើក ជាសំណុំបើក។

គ. ប្រសព្វរាប់អស់នៃសំណុំបើក ជាសំណុំបើក។

១២- ក្នុងលំហតូប៉ូ (X, T) បង្ហាញថា សំណុំរង A នៃ X ជាសំណុំបើក លុះត្រាតែ A^c ជាសំណុំបិទ។

១៣- គេមាន $(X, \mathcal{F})$ ជាលំហតូប៉ូណាមួយ។ បង្ហាញថាថ្នាក់នៃសំណុំរងបិទនៃ X មានលក្ខណៈដូចតទៅ៖

ក. សំណុំ $\varnothing$ និង X ជាសំណុំបិទ។

ខ. ប្រសព្វរាប់អស់ឬអនន្តជាតុនៃសំណុំបិទ ជាសំណុំបិទ។

គ. ប្រជុំរាប់អស់នៃសំណុំបិទ ជាសំណុំបិទ។

១៤- ឧបមាថា $\mathcal{T} = \{\varnothing, X, A, B\}$ តូប៉ូវិទ្យាលើសំណុំ X ដែល A និង B ជាសំណុំរងផ្ទាល់ផ្សេងគ្នាមិនទទេនៃ X ។ ចូរកំណត់រកលក្ខខណ្ឌលើសំណុំ A និង B ។

១៥- គេមាន $(Y, \mathcal{T})$ លំហតូប៉ូនិង X ជាសំណុំមិនទទេ។ តាង f ជាអនុគមន៍ពី X ទៅ Y និង តាង $\mathcal{T}_1 = \left\{ f^{-1}(S) : S \in \mathcal{T} \right\}$ ។ បង្ហាញថា $\mathcal{T}_1$ ជាតូប៉ូវិទ្យាលើ X ។

១៦- គេឱ្យសំណុំ $\mathbb{N}$ ជាមួយនិងគ្រួសារ $\mathcal{T}$ នៃសំណុំរងរបស់វារួមមានទាំង $\varnothing$ និងសំណុំទាំងអស់ដែលមានទម្រង់

$$A_k = \{ k, k+1, k+2, ... \} \quad (k = 1, 2, 3, ...) \qquad (1)$$ ។

បង្ហាញថា $\mathcal{T}$ ជាតូប៉ូវិទ្យាលើ $\mathbb{N}$ ។

១៧- បង្ហាញថា ប្រសព្វនៃគ្រួសារណាមួយនៃតូប៉ូវិទ្យាលើសំណុំ X ជាតូប៉ូវិទ្យាលើ X ។

១៨- បង្ហាញថា ប្រជុំនៃតូប៉ូវិទ្យា មិនមែនជាតូប៉ូវិទ្យាទេ។

១៩- បង្ហាញថា $\mathcal{T}$ ជាតូប៉ូវិទ្យាឌីសក្រេតលើ X លុះត្រាតែ គ្រប់ចំណុចជាសំណុំបើក។

២០- តាង X ជាសំណុំណាមួយ និង S ជាគ្រួសារនៃសំណុំរងរបស់វាដែលផ្ទៀងផ្ទាត់នូវលក្ខខណ្ឌខាងក្រោម៖

១. $X, \varnothing$ ។

២. ប្រជុំនៃធាតុពីរណាមួយនៃ S ជាធាតុនៃ S ។

៣. ប្រសព្វនៃគ្រួសារណាមួយនៃធាតុរបស់ S ជាធាតុនៃ S ។

តាង $\mathcal{T}$ ជាគ្រួសារមួយនៃសំណុំរងនៃ X ដែល $A \in \mathcal{T}$ លុះត្រាតែ $X \setminus A \in S$ ។ បង្ហាញថា $\mathcal{T}$ ជាតូប៉ូវិទ្យាលើ X ។

២១- បើ $d : X \times X \to \mathbb{R}$ ជាអនុវត្តន៍ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់៖

២. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

៣. $d(x, y) = d(y, x)$ ចំពោះគ្រប់ $x, y \in X$

៤. $d(x, z) \le d(x, y) + d(y, z)$ ចំពោះគ្រប់ $x, y, z \in X$ ។

បង្ហាញថា d ជាមេទ្រិកលើ X ។

២២. គេមាន A ជាសំណុំរងនៃលំហតូប៉ូ X ។

ក. បង្ហាញថា $A \cup A'$ ជាសំណុំបិទ។

ខ. បង្ហាញថា $\overline{A} = A \cup A'$ ។

២៣- គេមាន A ជាសំណុំរងនៃលំហតូប៉ូ $(X, \mathcal{T})$ ។ ចំណុច $x \in X$ ជាចំណុចលីមីតនៃ A លុះត្រាតែ គ្រប់វស៊ីណាសនៃ x មានចំណុចនៃ A ផ្សេងពី x ។

២៤- គេមាន A ជាសំណុំរងនៃលំហតូប៉ូ $(X, \mathcal{T})$ ។ នោះគេបានសំណុំ A ជាសំណុំបិទ លុះត្រាតែ ចំពោះ $x \in A^c$ នីមួយៗមានវស៊ីណាស M នៃ x ដែល $M \subseteq A^c$ ។

២៥- គេឱ្យ $X = \{a, b, c, d, e\}$ និង

$T = \{X, \varnothing, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e\}\}$ ។

ក. បង្ហាញថា T ជាតូប៉ូវិទ្យាលើ X ។

ខ. ចូរកំណត់ប្រព័ន្ធវស៊ីណាសនៃចំណុច e ។

គ. ចូរកំណត់ប្រព័ន្ធវស៊ីណាសនៃចំណុច c ។

២៦- ចូរកំណត់ប្រព័ន្ធវស៊ីណាសនៃចំណុច p ក្នុងលំហអាំងឌីសក្រេត X ។

២៧- គេមានសំណុំ M និង N ជាវស៊ីណាសពីរនៃចំណុច p ។ បង្ហាញថាសំណុំ $M \cap N$ ក៏ជាវស៊ីណាសនៃចំណុច p ដែរ។

២៨- គេឱ្យសំណុំ M ជា super set ណាមួយនៃវស៊ីណាស N នៃចំណុច p ។ បង្ហាញថា M ជាវស៊ីណាសនៃចំណុច p ។

២៩- ចូរកំណត់ថាតើចន្លោះនីមួយៗខាងក្រោម ជាវស៊ីណាសនៃ 0 ឬមិនមែន ចំពោះតូប៉ូវិទ្យាធម្មតាលើ $\mathbb{R}$ ៖

ក. $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ ខ. $(-1, 0]$

គ. $[0\,,\,\frac{1}{2})$ ឃ. $(0\,,1]$ ។

៣០- បង្ហាញថា បើសំណុំ G ជាសំណុំបើក លុះត្រាតែ វាជាវ៉ស៊ីណាសនៃចំណុច នីមួយៗរបស់វា។

៣១- តាង A ជាសំណុំរង $T-$បើកនៃ (X, T) និង $A\subseteq Y\subseteq X$ ។ បង្ហាញថា A ជាសំណុំបើកធៀបទៅនឹងតូប៉ូវិទ្យាធៀបលើ Y មានន័យថា A ជាសំណុំរង T_Y-បើកនៃ Y ។

៣២- គេឱ្យតូប៉ូវិទ្យាធម្មតា u លើសំណុំ $\mathbb{R}$ ។ ចូរកំណត់ថាតើសំណុំរងនីមួយៗ ខាងក្រោមនៃ $I=[0, 1]$ ជាសំណុំបើកធៀបនឹង I ឬមិនមែន៖

ក. $A=(1/2, 1]$ ខ. $B=(1/2, 2/3)$ គ. $C=(0, 1/2]$ ។

៣៣- គេឱ្យ A ជាសំណុំរងនៃលំហតូប៉ូ (X, T) ។ បង្ហាញថា T_A ជាតូប៉ូវិទ្យា លើសំណុំ A ។

៣៤- គេឱ្យ (X, T) ជាលំហរងនៃលំហតូប៉ូ (Y, T_1) ហើយ (Y, T_1) ជា លំហរងនៃលំហតូប៉ូ (Z, T_2) ។ បង្ហាញថា (X, T) ជាលំហរងនៃលំហតូប៉ូ (Z, T_2) ។

៣៥- គេឱ្យ $f: X\to Y$ ជាអនុគមន៍ណាមួយ។ បើ $(Y, \mathscr{T})$ ជាលំហអាំងឌីស ក្រេត បង្ហាញថា $f:(X, T)\to (Y, \mathscr{T})$ ជាអនុគមន៍ជាប់ចំពោះលំហតូប៉ូ T ណាក៏ដោយ។

៣៦- បង្ហាញថា $X=(0\,,1)$ អូមេអូម៉ូភិកទៅនឹង $Y=(1\,,+\infty)$ ។

៣៧- គេឱ្យរង្វង់ $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2=1\}$ និងការ៉េ $T=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: |x|+|y|=1\}$ ។ បង្ហាញថាសំណុំ S និង T ជាលំហអូមេអូម៉ូភិក។

៣៨. គេឱ្យអនុវត្តន៍ $d: X\times X\to\mathbb{R}$ ជាកំណត់ដោយ

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 \ , & x = y \\ 1 \ , & x \neq y \end{cases}$$

បង្ហាញថាគូ (X , d) ជាលំហមេទ្រិក។ វាហៅថាជា លំហមេទ្រិកឌីសក្រេត។

៣៩. បង្ហាញថា អនុវត្តន៍ $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$ ជាមេទ្រិក។

៤០. គេឱ្យអនុវត្តន៍ $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$(x,y) \mapsto d(x,y) = \sum_{i=1}^{n} | x_i - y_i |$$

បង្ហាញថាគូ $(\mathbb{R}^n , d)$ ជាលំហមេទ្រិក។

៤១. តើគេអាចកំណត់មេទ្រិកលើសំណុំណាមួយបានទេ ? បើមាន ចូររកឧទាហរណ៍មកបញ្ជាក់ផង។

៤២. បង្ហាញថាណមលើលំហវ៉ិចទ័រ V កំណត់ជាមេទ្រិកលើ V ។

៤៣- គេឱ្យ (X, d) ជាលំហមេទ្រិក។ បង្ហាញថា៖

ក. សំណុំ $\varnothing$ និង X ជាសំណុំបិទ។

ខ. ប្រសព្វរាប់អស់ឬអនន្តជាតុនៃសំណុំបិទ ជាសំណុំបិទ។

គ. ប្រជុំរាប់អស់នៃសំណុំបិទ ជាសំណុំបិទ។

ការសន្និដ្ឋាន

ជារួមមកវិញ យើងឃើញថា ជំពូកទី១បានបង្ហាញនូវនិយមន័យនៃសំណុំ ដ្យាក្រាមវិន ប្រមាណវិធីលើសំណុំ គោលការណ៍រាប់ កាឌីណាល់ ថ្នាក់នៃសំណុំ សំណុំស្វ័យគុណ គម្រប បំណែក ផលគុណនៃសំណុំ គ្រួសារនៃផ្នែក ទ្រឹស្តីបទនិង លក្ខណៈនៃសំណុំ។ ជាងនេះទៅទៀត ជំពូកទី១នេះបានផ្តល់នូវវិធីគណនាសំណុំ និង វិធីសម្រាយបញ្ជាក់នូវទ្រឹស្តីបទនិងលក្ខណៈមួយចំនួន។

ចំណែកឯជំពូកទី២បានផ្តល់នូវនិយមន័យនៃទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ ទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុច្រាស បណ្តាក់នៃទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ លក្ខណៈនៃទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ ទំនាក់ទំនងសមមូល សំណុំផលចែកនិងបំណែក។ ជំពូកទី២នេះបានផ្តល់នូវវិធីគណនាទំនាក់ទំនង និង វិធីសម្រាយបញ្ជាក់នូវទ្រឹស្តីបទមួយចំនួន។

ចំពោះជំពូកទី៣បានផ្តល់នូវនិយមន័យនៃអនុគមន៍ អនុគមន៍បង្រួម អនុគមន៍បន្លាយ អនុវត្តន៍ រូបភាព រូបភាពច្រាស លក្ខណៈនៃអនុវត្តន៍ បណ្តាក់នៃអនុវត្តន៍ អនុវត្តន៍ខ្លួនឯងនិងអនុវត្តន៍ច្រាស។ ជំពូកទី៣នេះបានផ្តល់នូវវិធីកំណត់រកអនុគមន៍ អនុវត្តន៍ និង វិធីសម្រាយបញ្ជាក់នូវទ្រឹស្តីបទមួយចំនួន។

ចំពោះជំពូកទី៤បានផ្តល់នូវនិយមន័យនៃសំណុំសមមូល សំណុំរាប់មិនអស់ សំណុំរាប់បាន សំណុំជាប់ កាឌីណាល់ និង សំណុំរៀបរយដោយផ្នែក។ ជំពូកទី៤នេះបានផ្តល់នូវវិធីសម្រាយបញ្ជាក់នូវទ្រឹស្តីបទនិងបញ្ហាគណិតវិទ្យាមួយចំនួន។

ចំណែកឯជំពូកទី៥បានផ្តល់នូវនិយមន័យនៃសំណុំបើក ចំណុចអាគុយ សំណុំបិទ ស៊ីត និង អនុគមន៍ជាប់ នៅក្នុងសំណុំរងនៃ $\mathbb{R}$ ។ ជំពូកទី៥នេះបានផ្តល់នូវវិធីសម្រាយបញ្ជាក់នូវទ្រឹស្តីបទនិងបញ្ហាគណិតវិទ្យាមួយចំនួន។

ចំពោះជំពូកទី៦បានផ្តល់នូវនិយមន័យនៃសំណុំបើក ចំណុចអាគុយ សំណុំបិទ ស៊្វីត និង អនុគមន៍ជាប់ នៅក្នុងសំណុំរងនៃ $\mathbb{R}^2$ ។ ជំពូកទី៦នេះបានផ្តល់នូវវិធីសម្រាយបញ្ជាក់នូវទ្រឹស្តីបទនិងបញ្ហាគណិតវិទ្យាមួយចំនួន។

ចំពោះជំពូកទី៧វិញបានផ្តល់នូវនិយមន័យនៃលំហតូប៉ូ សំណុំបើក ចំណុចអាគុយ សំណុំបិទ ក្នុង ក្រៅ ព្រំប្រទល់ តូប៉ូវិទ្យាបិទរាប់អស់ វស៊ីណាស ប្រព័ន្ធវស៊ីណាស តូប៉ូវិទ្យាធៀប លំហរង អនុគមន៍ជាប់ លំហអូមេអូម៉ភិក និង លំហមេទ្រិក។ ជំពូកទី៧នេះបានផ្តល់នូវវិធីសម្រាយបញ្ជាក់នូវទ្រឹស្តីបទនិងបញ្ហាគណិតវិទ្យាមួយចំនួន។

ជាទីបញ្ចប់នេះ យើងខ្ញុំយល់ឃើញថាការសិក្សាស្រាវជ្រាវទៅលើប្រធានបទអំពី « **ទំនាក់ទំនងរវាងពីជគណិតនិងតូប៉ូវិទ្យាទូទៅ** » បានផ្តល់នូវផលប្រយោជន៍ជាច្រើនទាំងខាងទ្រឹស្តីនិងការអនុវត្តគណនាវា។ ជាងនេះទៅទៀត យើងខ្ញុំបានទទួលនូវគំនិតថ្មីនិងចំណេះដឹងថ្មីដែលកើតចេញពីប្រធានបទនៃអត្ថបទស្រាវជ្រាវនេះនិងយើងខ្ញុំសង្ឃឹមថា សៀវភៅស្រាវជ្រាវនេះជាឯកសារដ៏សំខាន់មួយសម្រាប់ជួយដល់សិស្ស និស្សិត លោកគ្រូ និង អ្នកគ្រូដែលមានបញ្ហាខ្លះៗទាក់ទងនឹងទ្រឹស្តីពីជគណិតកម្រិតខ្ពស់និងតូប៉ូវិទ្យាទូទៅ ទាំងកម្រិតមធ្យមសិក្សានិងឧត្តមសិក្សា។

គន្ថនិទ្ទេស

១. Dipak Chatterjee, *Abstract Algebra*, New Delhi, Prentice-Hall of India Private Limited, 2001.

២. គណៈកម្មាធិការជាតិអចិន្ត្រៃយ៍នៃខេមរយានកម្មសិក្សា"*គណិតវិទ្យាៈ ពីជគណិត*" ក្រសួងអប់រំជាតិ ១៩៧៣។

៣. យឹម អាយុវឌ្ឍនៈវិជ្ជា " *ពីជគណិតកម្រិតខ្ពស់* " ភ្នំពេញ សាកលវិទ្យាល័យ ខេមរៈ ២០១៦។

៤. ឈឹម ម៉េង " *ពីជគណិតទូទៅ* " ភ្នំពេញ សាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ ២០១១។

៥. http://www.topologywithouttears.net/topbook.pdf

៦. https://ia800702.us.archive.org/31/items/SchaumsTheoryProblemsOfGeneralTopology/Lipschutz-GeneralTopology.pdf

៧. http://vle.du.ac.in/file.php/590/Limit_and_Continuity _of_Functions_of_several_variables/Limits_and_Continuity_of_Functions_of_several_Variables.pdf

៨. http://www.math.colostate.edu/~renzo/teaching/Topology10/Notes.pdf

៩. http://cseweb.ucsd.edu/~gill/CILASite/Resources/17AppABCbib.pdf

๑๐. https://www.math.utah.edu/~wortman/1050-text-if.pdf

๑๑. https://www.univ-sba.dz/fsi/lmd/ALGEBRE.pdf

๑๒. https://www.google.com/search?q=pictures+of+functions+in+mathematics&tbm=isch&tbo=u&source=univ&sa=X&ved=0ahUKEwiDyfKggsbaAhUJErwKHZvOAhEQsAQIJg&biw=1525&bih=730#imgdii=1y9uhMUZLxJSoM:&imgrc=9G-m9rsP0247-M:

๑๓. https://www.thinglink.com/scene/636534935942856704

๑๔. http://exo7.emath.fr/cours/livre-algebre-1.pdf

๑๕. http://plouffe.fr/simon/math/Finite%20maths.pdf

๑๖. http://alas.matf.bg.ac.rs/~mi10164/Materijali/DS.pdf